Determinare l'equazione dell'asse centrale del sistema di vettori :

$v_1 = 2i + 2j \quad , \quad P_1 = (0, 1)$
$v_2 = -2i - 2j \quad , \quad P_2 = (4, 2)$
$v_3 = 2j \quad , \quad P_3 = (3, 3)$

Svolgimento :

Dalla definizione di vettore momento polare , scelto un polo generico $O(x, y, z)$, si ha :

$$M_1(O) = (P_1 - O) \wedge v_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -x & 1-y & -z \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (2z)i - (2z)j + (-2x + 2y - 2)k$$

$$M_2(O) = (P_2 - O) \wedge v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4-x & 2-y & -z \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-2z)i - (-2z)j + (2x - 2y - 4)k$$

$$M_3(O) = (P_3 - O) \wedge v_3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3-x & 3-y & -z \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (2z)i + (-2x + 6)k$$

e quindi per il momento risultante :

$$M_R(O) = \sum_{i=1}^{3} (P_i - O) \wedge v_i = M_1(O) + M_2(O) + M_3(O) = (2z)i + (-2x)k$$

Allo stesso modo per il risultante del sistema si ha :

$$R = \sum_{i=1}^{3} v_i = v_1 + v_2 + v_3 = 2j$$

Ricordando che l'equazione dell'asse centrale è data dalla relazione $M(O) \wedge R = 0$

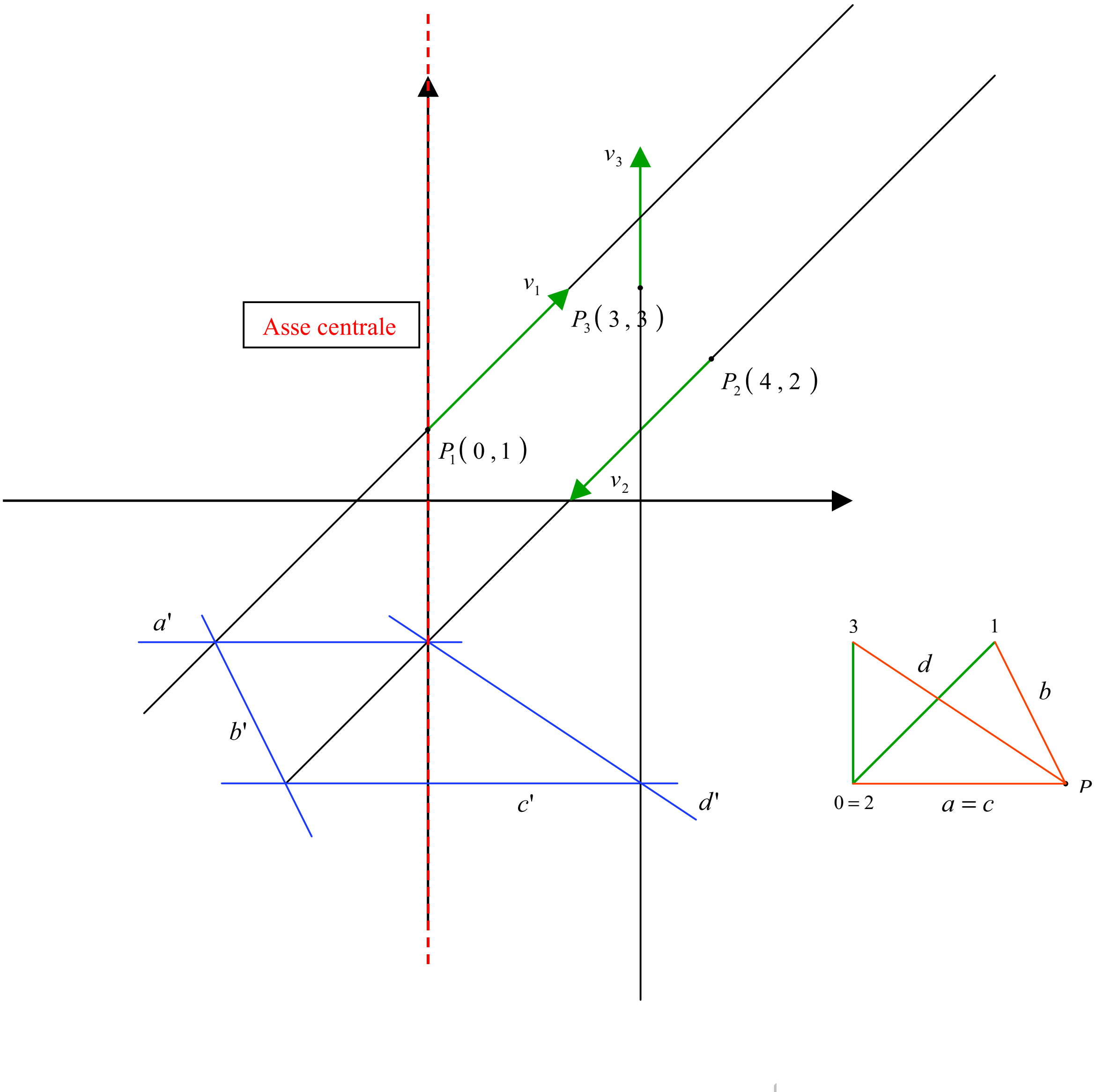
Si ha che :

$$M_R(O) \wedge R = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2z & 0 & -2x \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4xi + 4zk = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

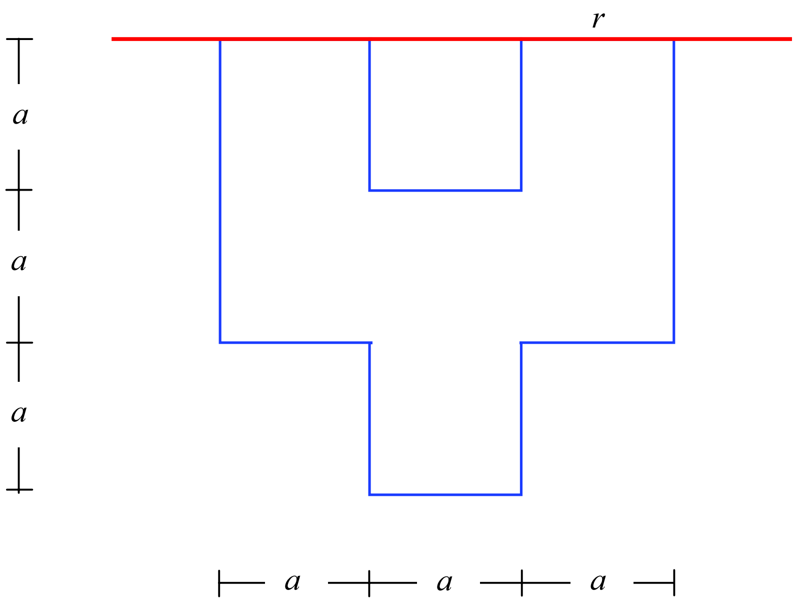
o allo stesso modo :

$$\frac{M_x}{R_x} = \frac{M_y}{R_y} = \frac{M_z}{R_z} \Rightarrow \frac{2z}{0} = \frac{0}{2} = \frac{-2x}{0} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Tramite procedimento grafico (poligono funicolare) si ha conferma del risultato :

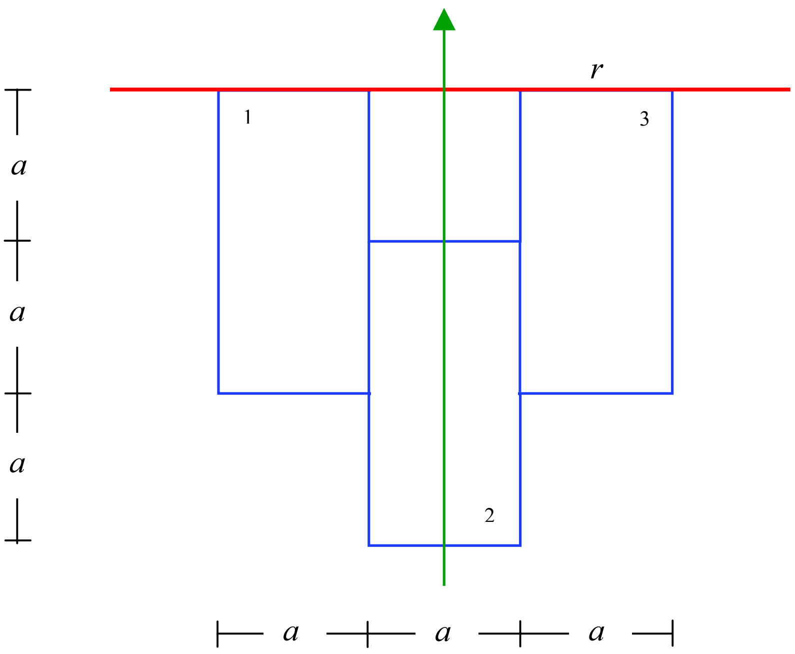


Determinare l'antipolo della retta r per il seguente sistema di masse

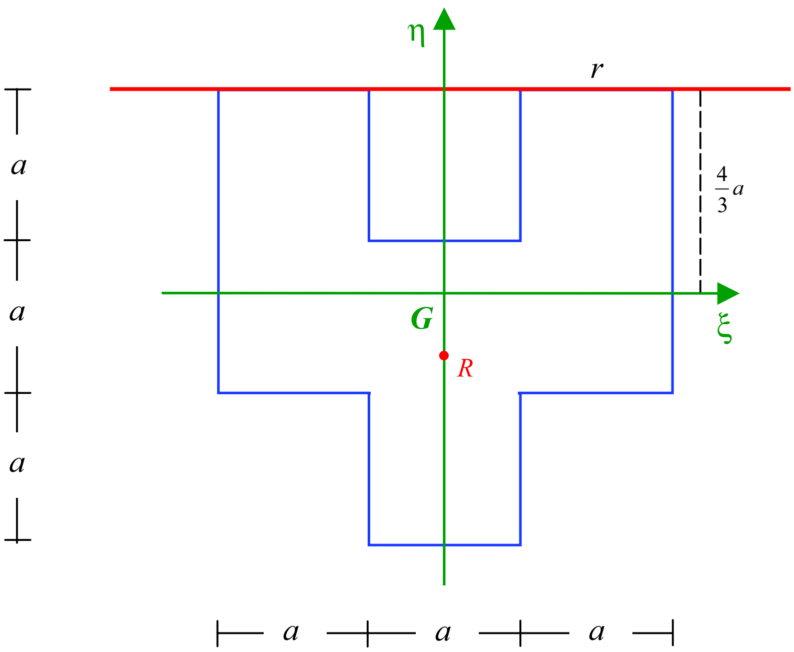


Svolgimento :

Poichè il sistema possiede un asse di simmetria questo oltre ad essere asse baricentrico del sistema è anche asse principale d'inerzia e quindi il baricentro ha coordinate $G(\,0\,,\,y_G\,)$.



$$y_G = \frac{S_r}{A} \quad \Rightarrow \quad y_G = \frac{S_{r1}+S_{r2}+S_{r3}}{A_1+A_2+A_3} = \frac{2a^2\cdot(-a)+2a^2\cdot(-2a)+2a^2\cdot(-a)}{2a^2+2a^2+2a^2} = -\frac{4}{3}a$$



Calcolando i momenti d'inerzia si ha :

$$I_\xi = I_{\xi 1}+I_{\xi 2}+I_{\xi 3} \quad \Rightarrow \quad \frac{a\cdot(2a)^3}{12}+2a^2\cdot\left(\frac{1}{3}a\right)^2+\frac{a\cdot(2a)^3}{12}+2a^2\cdot\left(\frac{2}{3}a\right)^2+\frac{a\cdot(2a)^3}{12}+2a^2\cdot\left(\frac{1}{3}a\right)^2$$

$$I_\xi = 2a^4+\frac{4}{3}a^2 = \frac{10}{3}a^4$$

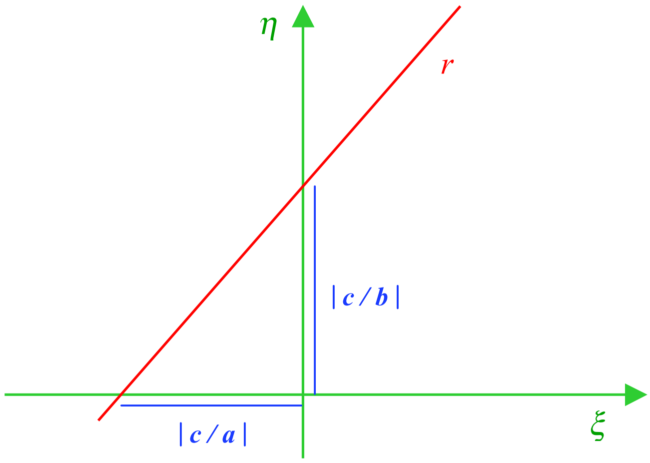
$$I_\eta = I_{\eta 1}+I_{\eta 2}+I_{\eta 3} \quad \Rightarrow \quad \frac{a^3\cdot 2a}{12}+2a^2\cdot a^2+\frac{a^3\cdot 2a}{12}+\frac{a^3\cdot 2a}{12}+2a^2\cdot a^2 = \frac{9}{2}a^4$$

I relativi raggi giratori d'inerzia :

$$\rho^2{}_\xi = \frac{I_\xi}{A} = \frac{10}{3}a^4\cdot\frac{1}{6a^2} = \frac{5}{9}a^2$$

$$\rho^2{}_\eta = \frac{I_\eta}{A} = \frac{9}{2}a^4\cdot\frac{1}{6a^2} = \frac{3}{4}a^2$$

Ricordando l'equazione della retta antipolare : $\boxed{\frac{a}{c}\xi + \frac{b}{c}\eta + 1 = 0}$



Si ha : $\frac{c}{b} = \frac{4}{3}a \quad \Rightarrow \quad \boxed{-\frac{3}{4a}\eta + 1 = 0}$ eq.ne retta antipolare

N.B. Si ricordi che i segmenti , intercettati dalla retta sugli assi del sistema principale , sono (nella equazione della retta antipolare) cambiati di segno insieme ai loro reciproci se individuati sul semiasse positivo .

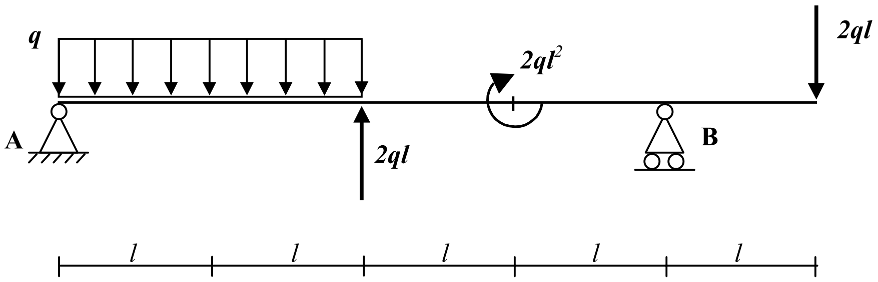
e dalle relazioni che portano all'antipolo : $\boxed{\xi_R = \frac{a}{c}\cdot \rho^2{}_\eta \quad ; \quad \eta_R = \frac{b}{c}\cdot \rho^2{}_\xi}$

$$\xi_R = 0$$

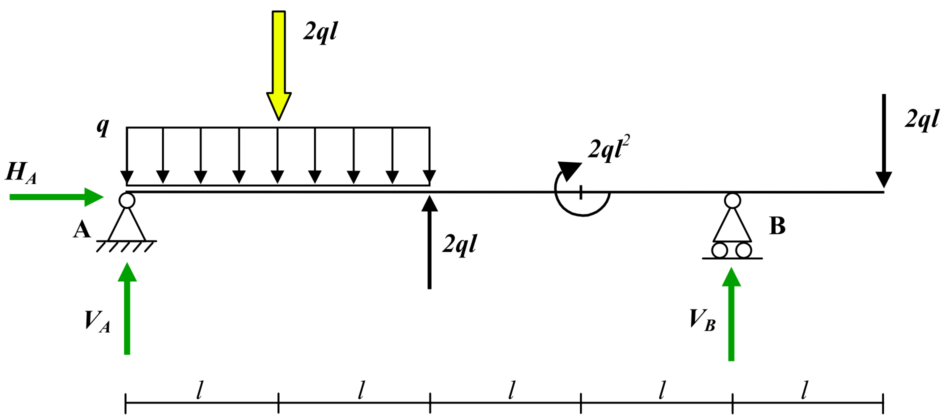
$$\eta_R = -\frac{3}{4a}\cdot\frac{5}{9}a^2 = -\frac{5}{12}a$$

di qui le coordinate del centro relativo (antipolo) della retta r : $R\left(0\,,-\frac{5}{12}a\right)$

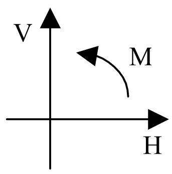
Determinare le reazioni vincolari e tracciare i diagrammi di sollecitazione



Calcolo delle reazioni vincolari :



Poiché la struttura è isostatica applicando le equazioni cardinali della statica si ha :



$$
\begin{cases}
\sum_H : \quad H_A = 0 \\
\sum_V : \quad V_A - 2ql + 2ql + V_B - 2ql = 0 \\
\sum_M (A): \quad -2ql^2 + 2ql \cdot 2l - 2ql^2 + V_B \cdot 4l - 2ql \cdot 5l = 0
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
\sum_H : \quad H_A = 0 \\
\sum_V : \quad V_A = -\frac{1}{2}ql \\
\sum_M (A): \quad V_B = \frac{5}{2}ql
\end{cases}
$$

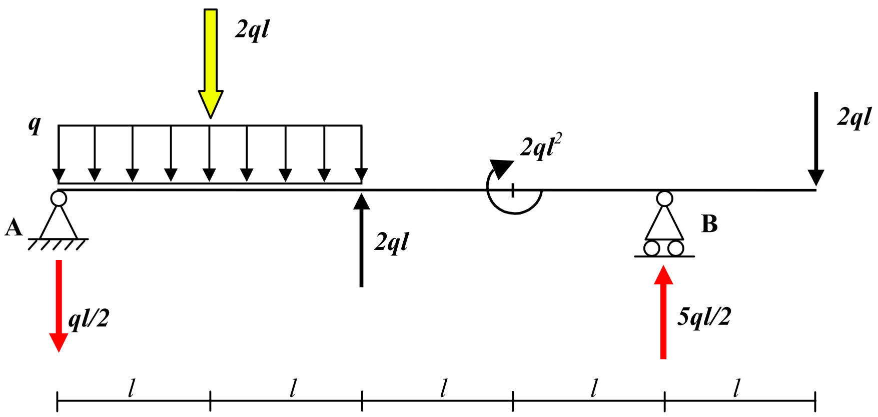
Allo stesso se il sistema viene espresso in forma matriciale : $AX = B$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4l \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H_A \\ V_A \\ V_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2ql \\ 10ql^2 \end{pmatrix}$$

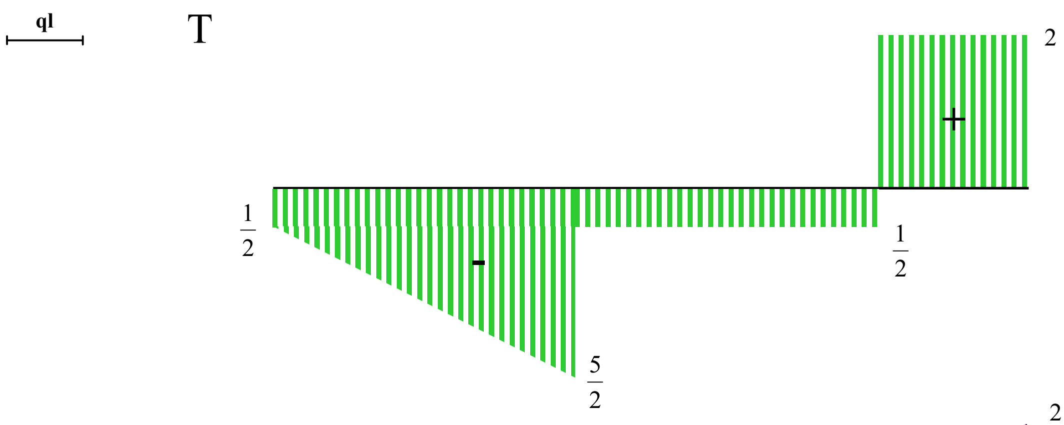
Applicando Cramer :

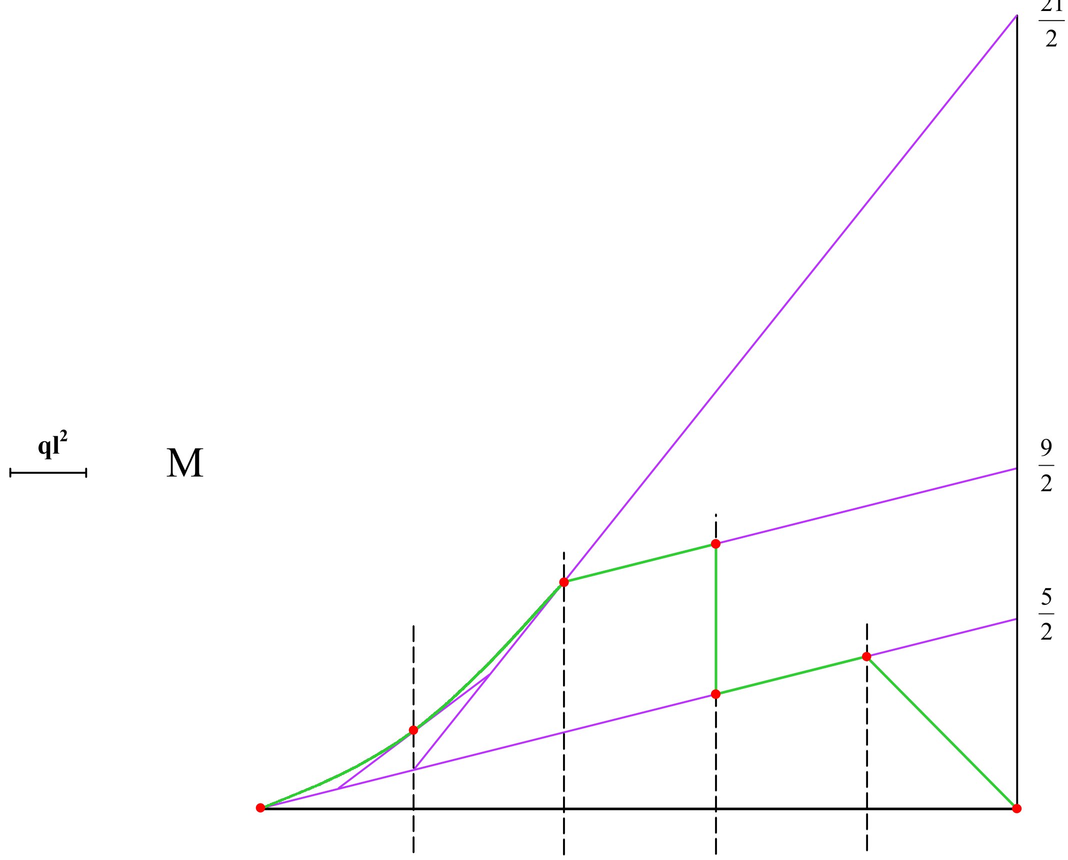
$$H_A = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2ql & 1 & 1 \\ 10ql^2 & 0 & 4l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4l \end{vmatrix}} = 0 \quad , \quad V_A = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2ql & 1 \\ 0 & 10ql^2 & 4l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4l \end{vmatrix}} = -\frac{1}{2}ql \quad , \quad V_B = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2ql \\ 0 & 0 & 10ql^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4l \end{vmatrix}} = +\frac{5}{2}ql$$

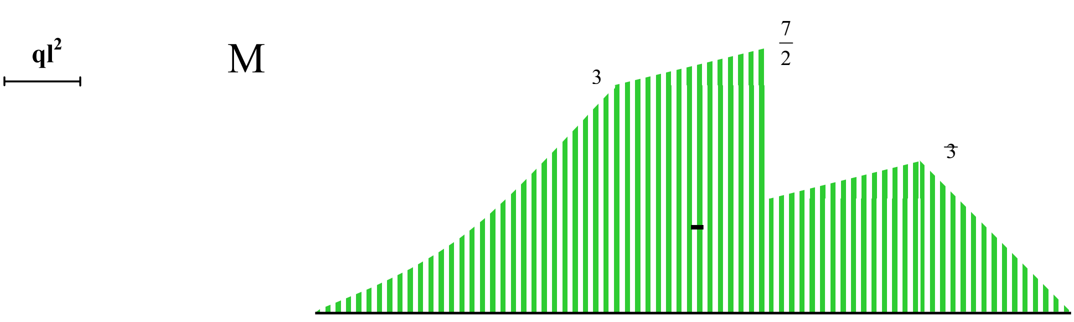
Si ha quindi per il sistema equilibrato :



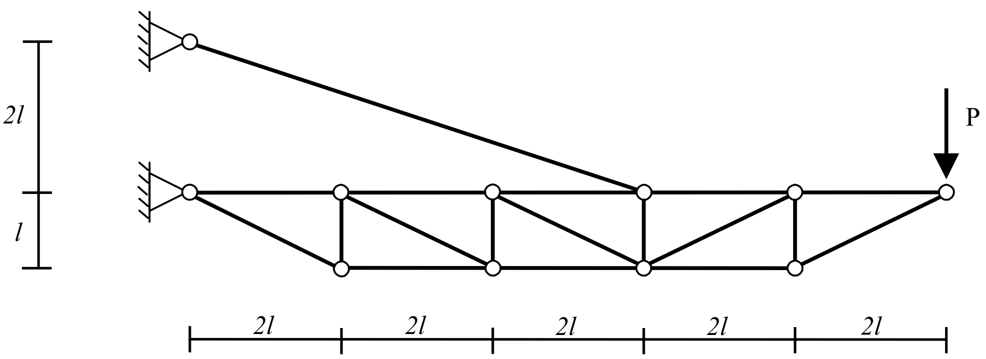
Diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione .   Applicando il metodo grafico :



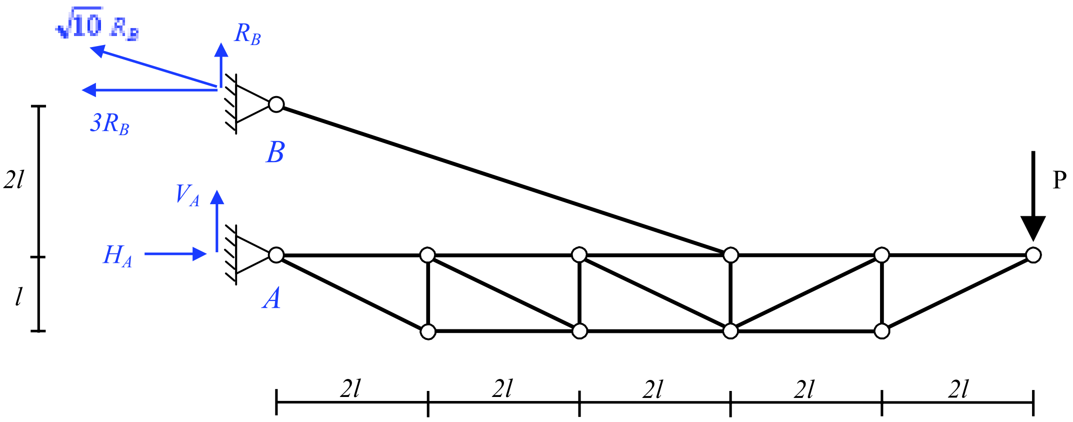




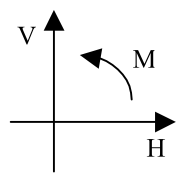
Risolvere la seguente struttura reticolare



Svolgimento :



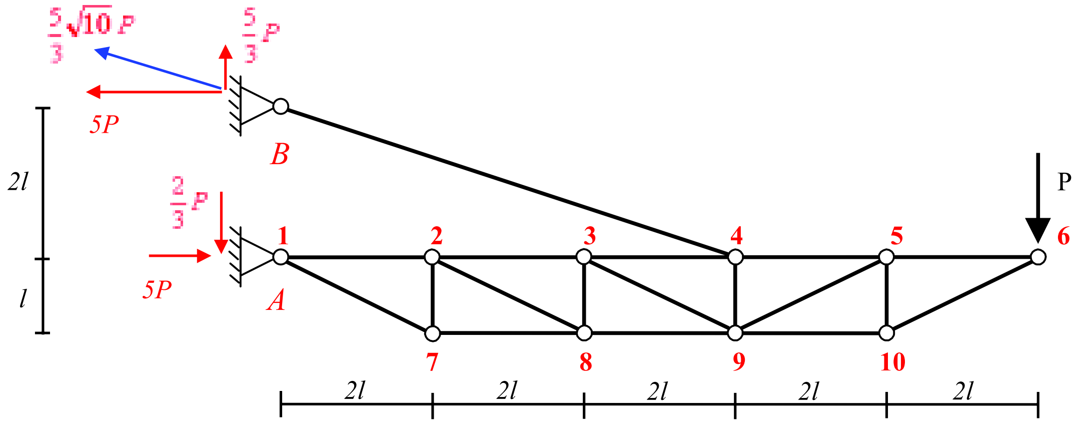
Calcolo delle reazioni vincolari :



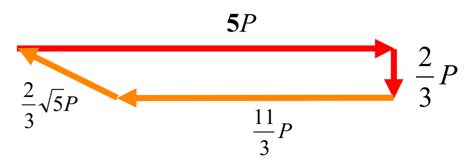
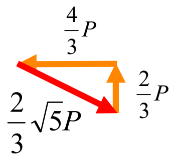
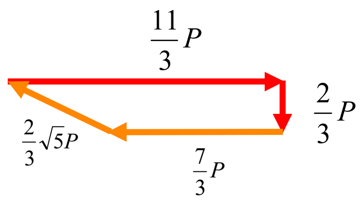
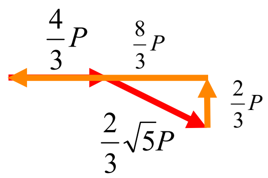
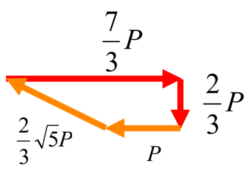
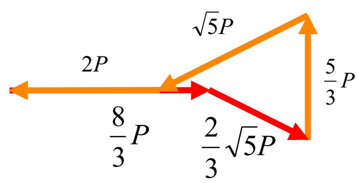
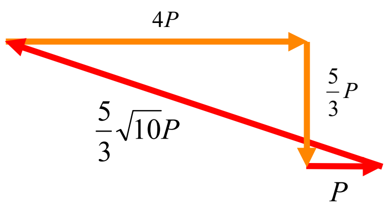
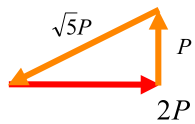
Poiché la struttura è isostatica applicando le equazioni cardinali della statica si ha :

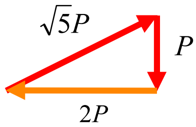
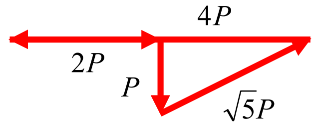
$$\begin{cases} \sum_H : \quad H_A - 3R_B = 0 \\ \sum_V : \quad V_A + R_B - P = 0 \\ \sum_M (A): \quad +3R_B \cdot 2l - P \cdot 10l = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_H : \quad H_A = 5P \\ \sum_V : \quad V_A = -\frac{2}{3}P \\ \sum_M (A): \quad R_B = \frac{5}{3}P \end{cases}$$

Si ha quindi per il sistema equilibrato :



Applicando il metodo grafico dell'equilibrio dei nodi si ottiene :

EQUILIBRIO NODO 1	**EQUILIBRIO NODO 7**
	
EQUILIBRIO NODO 2	**EQUILIBRIO NODO 8**
	
EQUILIBRIO NODO 3	**EQUILIBRIO NODO 9**
	
EQUILIBRIO NODO 4	**EQUILIBRIO NODO 10**
	

EQUILIBRIO NODO 6	EQUILIBRIO NODO 5
	

Riassumendo i valori ottenuti per le singole aste :

ASTE	TIRANTE	PUNTONE
1-2		$\frac{11}{3}P$
2-3		$\frac{7}{3}P$
3-4		P
4-5	$4P$	
5-6	$2P$	
1-7		$\frac{2}{3}\sqrt{5}P$
2-7	$\frac{2}{3}P$	
7-8		$\frac{4}{3}P$
2-8		$\frac{2}{3}\sqrt{5}P$
3-8	$\frac{2}{3}P$	
3-9		$\frac{2}{3}\sqrt{5}P$
4-9	$\frac{5}{3}P$	
5-9		$\sqrt{5}P$
9-10		$2P$
5-10	P	
6-10		$\sqrt{5}P$
8-9		$\frac{8}{3}P$
B-4	$\frac{5}{3}\sqrt{10}P$	

Rappresentando in modo schematico l'azione che i nodi esercitano sulle aste si ha il seguente schema grafico :