

Indice

Parte I - Teoria dei vettori

1. I vettori liberi	1
▷ 1.1 Generalità	1
▷ 1.2 Operazioni sui vettori	2
◇ 1.2.1 Somma di vettori	2
◇ 1.2.2 Moltiplicazione di un vettore per uno scalare	3
◇ 1.2.3 Prodotto scalare fra due vettori	4
◇ 1.2.4 Prodotto vettore fra due vettori	6
◇ 1.2.5 Prodotto misto	8
2. Algebra delle matrici	9
▷ 2.1 Generalità	9
▷ 2.2 Operazioni sulle matrici	10
◇ 2.2.1 Uguaglianza di matrici	10
◇ 2.2.2 Somma e differenza di matrici	10
◇ 2.2.3 Prodotto di una matrice per un numero reale	11
◇ 2.2.4 Moltiplicazioni di matrici	12
▷ 2.3 Matrici trasposte	14
▷ 2.4 Matrici inverse	15
▷ 2.5 Autovalori ed autovettori di una matrice	18
3. I vettori applicati	21
▷ 3.1 Premesse	21
▷ 3.2 Momento di un vettore applicato rispetto ad un polo	22
▷ 3.3 Risultante e momento risultante di un sistema di vettori applicati	22
▷ 3.4 Sistemi di vettori a risultante nullo	24
▷ 3.5 Sistemi di vettori a risultante non nullo	25
◇ 3.5.1 L'invariante scalare	25
◇ 3.5.2 Asse centrale del sistema	26
▷ 3.6 Sistemi equivalenti di vettori	27
▷ 3.7 Sistemi piani di vettori applicati	29
◇ 3.7.1 Sistemi di vettori paralleli	30
3.8 Studio grafico dei sistemi piani di vettori	30
◇ 3.8.1 Riduzione di due vettori non paralleli	31
◇ 3.8.2 Il poligono funicolare	31

II

Parte II - Esercizi

1. Strutture isostatiche	37
2. Travature reticolari	89
3. Geometria delle aree	127

Parte III - Diapositive delle lezioni

1. Lezione 1: Statica e Cinematica del corpo rigido	161
2. Lezione 2: Statica e Cinematica della trave	171
3. Lezione 3: Statica e Cinematica della trave piana	181
4. Lezione 4: Statica e Cinematica dei sistemi rigidi di travi	193
5. Lezione 5: Studio grafico della cinematica dei sistemi labili	203
6. Lezione 6: Studio grafico della statica dei sistemi di travi	211
7. Lezione 7: Equazioni indefinite di equilibrio	217
8. Lezione 8: Diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione	223
9. Lezione 9: La curva delle pressioni	233
10. Lezione 10: Analisi statica di travi e telai	239
11. Lezione 11: Strutture isostatiche: archi a tre cerniere	245
12. Lezione 12: Strutture isostatiche: travi ad asse rettilineo	257
13. Lezione 13: Strutture a maglie chiuse	263
14. Lezione 14: Strutture reticolari	271
15. Lezione 15: Strutture isostatiche: considerazioni finali	283

Capitolo 1

I vettori liberi

1.1 Generalità

Le grandezze fisiche possono dividersi in due categorie: le grandezze *scalari* e le grandezze *vettoriali*. Le grandezze scalari sono completamente definite mediante la loro misura in rapporto ad una certa unità, ovvero mediante un numero reale.

Per determinare completamente una grandezza vettoriale è invece necessario un numero reale non negativo, detto modulo, che ne caratterizzi l'intensità, una direzione ed un verso. I vettori sono gli strumenti matematici atti a rappresentare le grandezze vettoriali. Da un punto di vista formale, esistono numerosi modi di rappresentare un vettore. Nel seguito, una grandezza vettoriale verrà indicata in parentesi graffa; con $\{r\}$ per esempio si indicherà il vettore posizione di un punto P rispetto all'origine di un sistema di riferimento O , ovvero: $\{r\} = \{P - O\}$. Un tipico esempio di grandezza vettoriale è lo spostamento di un punto materiale, come pure la sua velocità o la sua accelerazione.

Per rappresentare graficamente una grandezza vettoriale si utilizzano dei segmenti orientati.

Per la rappresentazione cartesiana di un vettore $\{r\}$ si utilizza un sistema di riferimento ortogonale $Oxyz$ che si suppone sempre destro o *levogiro*, con x, y, z corrispondenti nell'ordine al pollice, indice e medio della mano destra (fig.1.1). Per definire le rotazioni positive, un osservatore orientato lungo l'asse x vede l'asse y sovrapporsi a z ruotando da destra verso sinistra (ovvero in senso antiorario), da cui il termine levogiro. Con permutazioni analoghe, orientati lungo y, z si sovrappone su x in senso antiorario, mentre orientati lungo z (nel caso più comune di piano xy) l'asse x si sovrappone su y in senso antiorario.

Il vettore che ha modulo (lunghezza) nullo si dice *vettore nullo* e si indica con $\{0\}$. Il vettore che ha modulo unitario si chiama *versore* e si indica con $\{1\}$. Si definisce *vettore opposto* $\{-r\}$ del vettore $\{r\}$, il vettore che ha lo stesso modulo di $\{r\}$, stessa direzione e verso opposto.

I versori diretti lungo i tre assi del sistema di riferimento $Oxyz$ si indicano con $\{i\}$, $\{j\}$ e $\{k\}$ e rispetto a tale sistema di riferimento hanno componenti: $\{i\} = \{1, 0, 0\}^T$, $\{j\} = \{0, 1, 0\}^T$ e $\{k\} = \{0, 0, 1\}^T$, dove per il significato del simbolo T si rimanda al Capitolo 2.

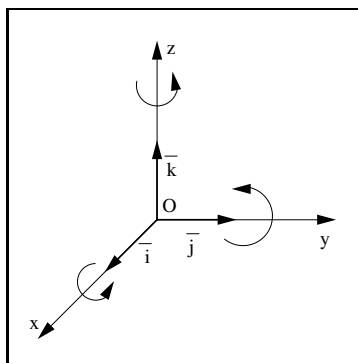


Figura 1.1

Esiste quindi una corrispondenza biunivoca fra i vettori dello spazio tridimensionale e le terne di numeri reali. Per determinare un vettore è necessario determinare la lunghezza, o modulo, la sua direzione e verso mediante i coseni direttori (ovvero i coseni degli angoli che la direzione e verso del vettore forma con i tre assi coordinati x , y e z). Più semplicemente si possono assegnare le tre componenti del vettore lungo i tre assi coordinati, che rappresentano proprio i coseni direttori del vettore rispetto agli assi.

1.2 Operazioni sui vettori

1.2.1 Somma di vettori

La somma di due vettori $\{u\}$ e $\{v\}$ è un vettore $\{w\}$:

$$\{u\} + \{v\} = \{w\}$$

definibile come quel vettore che unisce l'origine del vettore $\{u\}$ con l'estremo del vettore $\{v\}$, avendo fatto coincidere l'origine di $\{v\}$ con l'estremo di $\{u\}$ (fig.1.2).

Dati due vettori $\{u\}$ e $\{v\}$, l'operazione $\{u\} + \{-v\}$, somma fra il vettore $\{u\}$ e l'opposto di $\{v\}$ è detta differenza fra i vettori $\{u\}$ e $\{v\}$ e si scrive $\{u\} - \{v\}$ (fig. reffig:vettoric).

La definizione di somma di vettori fornisce le seguenti proprietà:

- | | |
|--|---------------------------|
| 1. $\{u\} + \{v\} = \{v\} + \{u\}$ | proprietà commutativa |
| 2. $(\{u\} + \{v\}) + \{w\} = \{u\} + (\{v\} + \{w\})$ | proprietà associativa |
| 3. $\{u\} + \{0\} = \{u\}$ | proprietà vettore nullo |
| 4. $\{u\} + \{-u\} = \{0\}$ | proprietà vettore opposto |

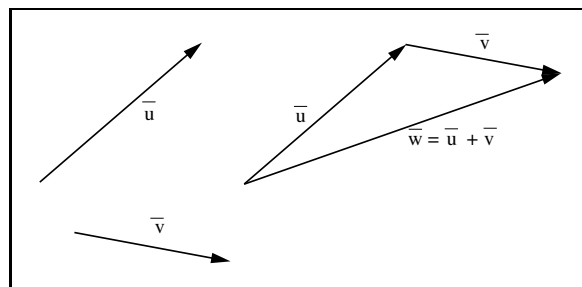


Figura 1.2

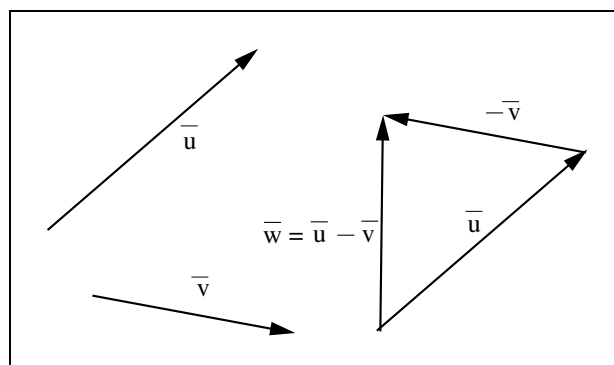


Figura 1.3

1.2.2 Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

Detta α una quantità scalare, si definisce moltiplicazione dello scalare α per il vettore $\{u\}$ l'operazione che associa ad ogni α e ad ogni $\{u\}$ un vettore $\{v\}$ di modulo pari al prodotto del valore assoluto di α per il modulo di $\{u\}$, di direzione uguale a quella di $\{u\}$ e verso concorde a quello di $\{u\}$ per $\alpha > 0$, opposto per $\alpha < 0$.

$$\alpha\{u\} = \{v\}, \text{ con } |v| = |\alpha| \cdot |u| \quad (1.1)$$

Si definisce *versore* di un vettore $\{u\}$ il vettore che ha direzione e verso coincidenti con $\{u\}$ e modulo unitario:

$$\text{vers}\{u\} = \frac{1}{|u|}\{u\} \quad (1.2)$$

La definizione di moltiplicazione di un vettore per uno scalare fornisce le seguenti proprietà. Detti α e β due scalari si ha:

1. $1 \cdot \{u\} = \{u\}$
2. $\alpha(\beta\{u\}) = \alpha\beta\{u\}$ proprietà associativa
3. $(\alpha + \beta)\{u\} = \alpha\{u\} + \beta\{u\}$ proprietà distributiva rispetto alla somma fra scalari
4. $\alpha(\{u\} + \{v\}) = \alpha\{u\} + \alpha\{v\}$ proprietà distributiva rispetto alla somma fra vettori

Due vettori $\{u\} = \{u_x, u_y, u_z\}^T$ e $\{v\} = \{v_x, v_y, v_z\}^T$, espressi in funzione dei versori degli assi del sistema di riferimento, hanno la seguente espressione:

$$\{u\} = u_x\{i\} + u_y\{j\} + u_z\{k\} \quad (1.3)$$

$$\{v\} = v_x\{i\} + v_y\{j\} + v_z\{k\} \quad (1.4)$$

Per le proprietà della somma fra vettori e della moltiplicazione di un vettore per uno scalare si ha:

$$\{u\} + \{v\} = (u_x + v_x)\{i\} + (u_y + v_y)\{j\} + (u_z + v_z)\{k\} \quad (1.5)$$

Il vettore somma ha cioè per componenti la somma delle rispettive componenti cartesiane di ciascuno dei due vettori.

Detto viceversa α uno scalare e $\{u\} = \{u_x, u_y, u_z\}^T$ un vettore, per le proprietà appena elencate si ha:

$$\alpha\{u\} = \alpha u_x\{i\} + \alpha u_y\{j\} + \alpha u_z\{k\} \quad (1.6)$$

Il vettore $\alpha\{u\}$ ha cioè per componenti cartesiane il prodotto delle componenti cartesiane di $\{u\}$ per lo scalare α .

1.2.3 Prodotto scalare fra due vettori

Si definisce prodotto scalare fra due vettori $\{u\}$ e $\{v\}$ l'operazione che associa ai due vettori il numero reale così definito:

$$\{u\} \times \{v\} = |u| \cdot |v| \cos \phi \quad (1.7)$$

dove con ϕ si è indicato l'angolo fra le due direzioni orientate di $\{u\}$ e $\{v\}$. Indicando con $\{u_v\}$ la proiezione di $\{u\}$ su $\{v\}$, si può notare come il prodotto scalare fra due vettori risulti uguale al prodotto del modulo di uno dei due vettori per la componente dell'altro vettore secondo la direzione orientata del primo (fig.1.4).

Si osservi come il prodotto scalare fra due vettori sia nullo se almeno uno dei due vettori sia nullo oppure se i due vettori siano ortogonali fra loro.

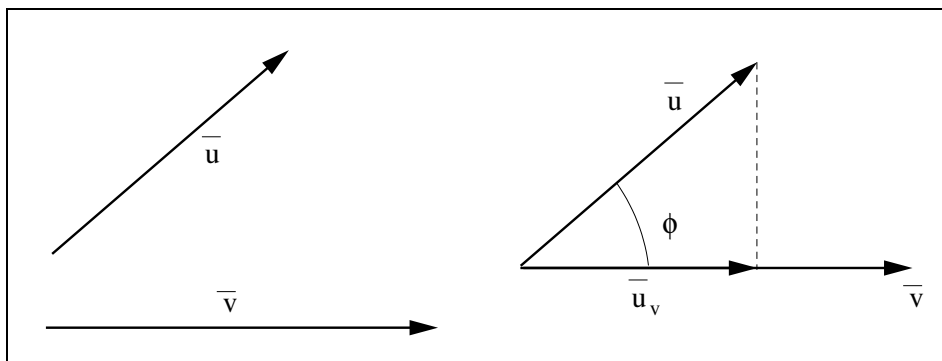


Figura 1.4

Il prodotto scalare risulta positivo se l'angolo ϕ compreso fra i due vettori è minore di $\frac{\pi}{2}$, negativo se $\phi > \frac{\pi}{2}$.

Se $\{u\} = \{v\} \Rightarrow \{u\} \times \{v\} = |u| \cdot |v| \cos 0 = |u|^2$.

Data una retta orientata r , detto $\{e\}$ il suo versore, per il generico vettore $\{u\}$ si ha:

$$\{u\} \times \{e\} = |u| \cdot |e| \cos \phi = u_r \quad (1.8)$$

essendo $|e| = 1$ e $|u| \cos \phi = u_r$, dove con ϕ si è indicato l'angolo compreso fra $\{u\}$ e $\{e\}$. La componente di un vettore $\{u\}$ secondo una retta orientata r coincide quindi con il prodotto scalare del vettore $\{u\}$ per il versore della retta.

Il prodotto scalare, in base alla sua definizione, gode delle seguenti proprietà:

1. $\{u\} \times \{v\} = \{v\} \times \{u\}$ proprietà commutativa
2. $(\alpha\{u\}) \times \{v\} = \{u\} \times (\alpha\{v\})$ proprietà associativa rispetto alla moltiplicazione per uno scalare
3. $\{u\} \times (\{v\} + \{w\}) = \{u\} \times \{v\} + \{u\} \times \{w\}$ proprietà associativa rispetto alla somma fra vettori
4. se $\{u\} \times \{v\} = 0, \forall \{u\} \neq 0 \Rightarrow \{v\} = \{0\}$.

Applicando direttamente la definizione di prodotto scalare al prodotto dei versori della terna fondamentale si possono ricavare i seguenti risultati notevoli:

$\{i\} \times \{i\} = 1$	$\{i\} \times \{j\} = 0$	$\{i\} \times \{k\} = 0$
$\{j\} \times \{i\} = 0$	$\{j\} \times \{j\} = 1$	$\{j\} \times \{k\} = 0$
$\{k\} \times \{i\} = 0$	$\{k\} \times \{j\} = 0$	$\{k\} \times \{k\} = 1$

essendo l'angolo compreso tra i due generici versori pari a $\frac{\pi}{2}$, ed avendo i versori modulo unitario. Utilizzando i precedenti risultati risulta agevole dimostrare come il prodotto scalare di due vettori in componenti cartesiane valga:

$$\{u\} \times \{v\} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z. \quad (1.9)$$

1.2.4 Prodotto vettoriale fra due vettori

Si definisce prodotto vettoriale fra due vettori $\{u\}$ e $\{v\}$ l'operazione che associa ai due vettori un terzo vettore $\{w\}$ così definito:

$$\{u\} \wedge \{v\} = \{n\} |u| \cdot |v| \sin \phi, \quad (1.10)$$

dove ϕ è l'angolo compreso fra $\{u\}$ e $\{v\}$, $\{n\}$ è il versore normale sia ad $\{u\}$ che a $\{v\}$, il cui verso è tale che un osservatore posto lungo $\{n\}$ veda ruotare in senso antiorario $\{u\}$ per sovrapporsi su $\{v\}$.

Il modulo del vettore $\{w\}$ è pari al doppio dell'area del triangolo di lati $\{u\}$ e $\{v\}$ (fig.1.5). Il prodotto vettoriale si annulla (ovvero fornisce come risultato il vettore nullo) se uno dei due vettori è nullo, oppure quando i due vettori $\{u\}$ e $\{v\}$ sono paralleli ($\sin \phi = 0$).

Il prodotto vettoriale, in base alla sua definizione, gode delle seguenti proprietà:

1. $\{u\} \wedge \{v\} = -\{v\} \wedge \{u\}$ il prodotto vettoriale non è commutativo
2. $\alpha \{u\} \wedge \{v\} = \alpha (\{u\} \wedge \{v\})$
3. $\{u\} \wedge (\{v\} + \{w\}) = \{u\} \wedge \{v\} + \{u\} \wedge \{w\}$

Applicando direttamente la definizione di prodotto vettoriale fra due vettori al prodotto dei versori della terna fondamentale si possono ricavare i seguenti risultati notevoli:

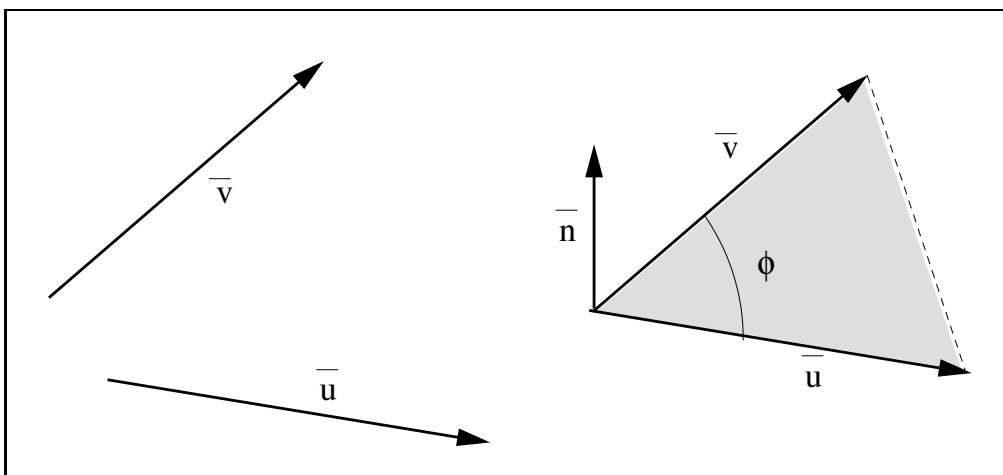


Figura 1.5

$\{i\} \wedge \{i\} = 0$	$\{i\} \wedge \{j\} = \{k\}$	$\{i\} \wedge \{k\} = \{-j\}$
$\{j\} \wedge \{i\} = \{-k\}$	$\{j\} \wedge \{j\} = 0$	$\{j\} \wedge \{k\} = \{i\}$
$\{k\} \wedge \{i\} = \{j\}$	$\{k\} \wedge \{j\} = \{-i\}$	$\{k\} \wedge \{k\} = 0$

In base alle precedenti proprietà si può dimostrare come, assegnati due vettori $\{u\} = \{u_x, u_y, u_z\}^T$ e $\{v\} = \{v_x, v_y, v_z\}^T$, il prodotto vettoriale in componenti cartesiane valga:

$$\{u\} \wedge \{v\} = (u_y v_z - u_z v_y)\{i\} + (u_z v_x - u_x v_z)\{j\} + (u_x v_y - u_y v_x)\{k\}. \quad (1.11)$$

Allo stesso risultato si può arrivare mediante il calcolo del determinante simbolico sviluppato secondo gli elementi della prima riga:

$$\{u\} \wedge \{v\} = \begin{vmatrix} \{i\} & \{j\} & \{k\} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \{i\} \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} - \{j\} \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} + \{k\} \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \quad (1.12)$$

che sviluppato coincide con la (1.11).

1.2.5 Prodotto misto

Dati tre vettori $\{u\}$, $\{v\}$ e $\{w\}$, si definisce prodotto misto lo scalare:

$$\{u\} \times (\{v\} \wedge \{w\}) = \{u\} \times \{v\} \wedge \{w\} \quad (1.13)$$

che si ottiene moltiplicando prima vettorialmente $\{v\}$ per $\{w\}$ ed il vettore risultato scalarmente per $\{u\}$. Il valore assoluto dello scalare $\{u\} \times \{v\} \wedge \{w\}$ rappresenta il volume del parallelepipedo avente per lati $\{u\}$, $\{v\}$ e $\{w\}$. Si può dimostrare come un prodotto misto non cambi se si esegua una permutazione circolare sui vettori, ovvero:

$$\{u\} \times (\{v\} \wedge \{w\}) = \{v\} \times \{w\} \wedge \{u\} = \{w\} \times \{u\} \wedge \{v\} \quad (1.14)$$

e che esso si annulla se i tre vettori risultino paralleli ad uno stesso piano.

In componenti cartesiane il prodotto misto assume la seguente espressione:

$$\begin{aligned} & \{u\} \times (\{v\} \wedge \{w\}) = \\ & = (u_x\{i\} + u_y\{j\} + u_z\{k\}) \times [(v_x\{i\} + v_y\{j\} + v_z\{k\}) \wedge (w_x\{i\} + w_y\{j\} + w_z\{k\})] = \\ & = u_x(v_yw_z - v_zw_y) + u_y(v_zw_x - v_xw_z) + u_z(v_xw_y - v_yw_x) \end{aligned}$$

che risulta essere la forma espansa del determinante della seguente matrice:

$$\{u\} \times (\{v\} \wedge \{w\}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \quad (1.15)$$

Capitolo 2

Algebra delle matrici

2.1 Generalità

Un insieme di $m \times n$ numeri (reali o complessi) ordinati in una tabella rettangolare di m righe ed n colonne

$$[A]_{(m \times n)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} \quad (2.1)$$

si chiama *matrice*.

I numeri a_{ij} ($i=1, 2, \dots, m$; $j=1, 2, \dots, n$) che compongono la matrice si chiamano elementi. Il primo indice i indica il numero della riga di appartenenza dell'elemento, il secondo il numero della colonna. La matrice (2.1) è di ordine $(m \times n)$.

Se $m = n$ la matrice si chiama *quadrata di ordine n* . Se invece $m \neq n$, allora la matrice è rettangolare. In particolare una matrice rettangolare di ordine $(1 \times n)$ prende il nome di *vettore riga*, e di *vettore colonna* quella di ordine $(m \times 1)$. Un numero scalare può essere considerato come una matrice (1×1) .

Una matrice quadrata

$$[A]_{(n \times n)} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{vmatrix} \quad (2.2)$$

si chiama *matrice diagonale*.

Se $\alpha_i = 1$ ($i=1, 2, \dots, n$), la matrice (2.2) si chiama *matrice unità* e la si indica con il simbolo $[1]$

$$[1]_{(n \times n)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad (2.3)$$

Una matrice dove tutti gli elementi sono zeri è detta nulla e la si indica con $[0]$.
Se la matrice $[A]$ è quadrata si può utilizzare il concetto di determinante

$$\det[A] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.4)$$

che corrisponde al numero così definito:

$$\det[A] = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} (-1)^x a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n} \quad (2.5)$$

dove la somma è estesa a tutte le permutazioni possibili $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ degli elementi $1, 2, \dots, n$, e consta di $n!$ termini; in più $x = 0$ se la permutazione è pari, $x = 1$ se la permutazione è dispari.

Per $n=2$ le permutazioni possibili sono: 12, 21.

Per $n=3$ le permutazioni possibili sono: 123, -132, -213, 231, 312, -321.

Per matrici di ordine 2 il determinante è:

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (2.6)$$

Per matrici di ordine 3:

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \det \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \det \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \det \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (2.7)$$

2.2 Operazioni sulle matrici

2.2.1 Uguaglianza di matrici

Due matrici $[A]$ e $[B]$ sono uguali: $[A] = [B]$ se sono dello stesso tipo, ovvero se hanno lo stesso numero di righe e di colonne e se i loro elementi sono uguali:

$$a_{ij} = b_{ij}$$

2.2.2 Somma e differenza di matrici

Si chiama somma di due matrici $[A]$ e $[B]$ dello stesso ordine una matrice $[C]$ dello stesso ordine i cui elementi c_{ij} sono uguali alla somma degli elementi rispettivamente a_{ij} e b_{ij} delle matrici $[A]$ e $[B]$: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, ovvero:

$$[C] = [A] + [B] = \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{vmatrix} \quad (2.8)$$

La definizione di somma di matrici fornisce le seguenti proprietà

1. $[A] + ([B] + [C]) = ([A] + [B]) + [C]$ proprietà associativa
2. $[A] + [B] = [B] + [A]$ proprietà commutativa
3. $[A] + [0] = [A]$ elemento neutro

La differenza di matrici è definita in modo analogo:

$$[C] = [A] - [B] = \begin{vmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2n} - b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \dots & a_{mn} - b_{mn} \end{vmatrix} \quad (2.9)$$

2.2.3 Prodotto di una matrice per un numero reale

Il prodotto di una matrice $[A]$ per un numero reale α (ovvero il prodotto di un numero α per una matrice $[A]$) è una matrice dello stesso tipo di $[A]$ dove gli elementi si ottengono dalla moltiplicazione di tutti gli elementi della matrice $[A]$ per il numero α :

$$[A]\alpha = \alpha[A] = \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{vmatrix} \quad (2.10)$$

La definizione di prodotto di un numero reale per una matrice rende immediate le seguenti proprietà:

1. $1[A] = [A]$
2. $0[A] = [0]$
3. $\alpha(\beta[A]) = (\alpha\beta)[A]$
4. $(\alpha + \beta)[A] = \alpha[A] + \beta[A]$
5. $\alpha([A] + [B]) = \alpha[A] + \alpha[B]$

dove α e β sono dei numeri reali e $[A]$ e $[B]$ delle matrici.

Ricordando che se la matrice $[A]$ è una matrice quadrata di ordine n , si ha:

$$\det \alpha[A] = \alpha^n \det[A] \quad (2.11)$$

Assegnata una matrice $[A]$, la matrice:

$$-[A] = (-1)[A]$$

si dice opposta della matrice $[A]$.

Se le matrici $[A]$ e $[B]$ sono dello stesso ordine, si può scrivere:

$$[A] - [B] = [A] + (-[B]) \quad (2.12)$$

2.2.4 Moltiplicazioni di matrici

$$\text{Siano } [A]_{(m \times n)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} \text{ e } [B]_{(p \times q)} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pq} \end{vmatrix}$$

due matrici rispettivamente di ordine $(m \times n)$ e $(p \times q)$. Se il numero delle colonne della matrice $[A]$ è uguale al numero delle righe della matrice $[B]$, ovvero se $n = p$, si può definire la matrice $[C]$ di ordine $(m \times q)$ la matrice *prodotto* delle matrici iniziali:

$$[C]_{(m \times q)} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mq} \end{vmatrix} \quad (2.13)$$

dove:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

con $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ i -esima riga di $[A]$

e $(b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj})$ j -esima colonna di $[B]$.

Tale definizione esprime la regola della moltiplicazione di matrici:

l'elemento della i -esima riga e della j -esima colonna del prodotto di due matrici si ottiene moltiplicando gli elementi della i -esima riga della prima matrice per gli elementi rispettivi della j -esima colonna della seconda matrice ed addizionando i prodotti ottenuti.

Il prodotto $[A][B]$ ha senso solo se le righe della matrice $[A]$ sono tante quante le colonne della matrice $[B]$. In particolare, si possono moltiplicare matrici quadrate dello stesso ordine.

Esempio 1

$$[A]_{(2 \times 4)} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad [B]_{(4 \times 2)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$[A][B] = \begin{vmatrix} 3 \times 2 + 2 \times 1 + 8 \times 0 + 1 \times 3 & 3 \times (-1) + 2 \times (-3) + 8 \times 1 + 1 \times 1 \\ 1 \times 2 - 4 \times 1 + 0 \times 0 + 3 \times 3 & 1 \times (-1) - 4 \times (-3) + 0 \times 1 + 3 \times 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 11 & 0 \\ 7 & 14 \end{vmatrix}.$$

Esempio 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 \\ 4 \times 1 + 5 \times 2 + 6 \times 3 \\ 7 \times 1 + 8 \times 2 + 9 \times 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 \\ 32 \\ 50 \end{vmatrix}$$

Un prodotto matriciale gode delle seguenti proprietà:

1. $[A]([B][C]) = ([A][B])[C]$;
2. $\alpha([A][B]) = (\alpha[A])[B]$;
3. $([A] + [B])[C] = [A][C] + [B][C]$;
4. $[C]([A] + [B]) = [C][A] + [C][B]$;

Il prodotto di due matrici non è commutativo, ovvero, in generale $[A][B] \neq [B][A]$. Per conferma si veda l'esempio seguente:

Esempio 3

$$[A] = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}; \quad [B] = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$[A][B] = \begin{vmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 & 3 \times 6 + 4 \times 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{vmatrix}.$$

$$[B][A] = \begin{vmatrix} 5 \times 1 + 6 \times 3 & 5 \times 2 + 6 \times 4 \\ 7 \times 1 + 8 \times 3 & 7 \times 2 + 8 \times 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{vmatrix}.$$

Il prodotto di due matrici può avere un senso in una direzione e non avere alcun significato nell'altro. Ovverosia, nel prodotto tra due matrici è fondamentale l'ordine delle matrici.

Esempio 4

$$[A] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}; \quad [B] = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$[A][B] = \begin{vmatrix} 19 & 13 & 7 \\ 46 & 31 & 19 \end{vmatrix}$$

mentre il prodotto $[B][A]$ non può esistere.

La matrice unitaria $[1]$ gioca il ruolo dell'unità; considerando una matrice quadrata $[A]$ dello stesso ordine di $[1]$ si ha:

$$[A][1] = [1][A] = [A]$$

2.3 Matrici trasposte

Si consideri la matrice:

$$[A]_{(m \times n)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Scambiando le righe con le colonne rispettivamente, si ottiene una matrice di ordine $(n \times m)$ detta *trasposta*.

$$[A]^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$(n \times m)$

In particolare, il vettore colonna ha per trasposto il vettore riga:

$$\{A\} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$$

Dalla definizione di matrice trasposta, il prodotto scalare fra due vettori $\{u\}^T = \{u_x, u_y, u_z\}$ e $\{v\}^T = \{v_x, v_y, v_z\}$, definito dalla eq.(1.7), può essere così riscritto:

$$\{u\}^T \{v\} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = \{w\} \quad (2.14)$$

$(1 \times 3) \quad (3 \times 1) \quad (1 \times 1)$

che fornisce come risultato una matrice di ordine (1×1) , ovvero uno scalare, coincidente con quanto ottenuto con la eq.(1.9).

La matrice trasposta gode delle seguenti proprietà:

- ▷ la trasposta della trasposta coincide con la matrice iniziale

$$([A]^T)^T = [A];$$

- ▷ la matrice trasposta di una somma è uguale alla somma delle matrici trasposte:

$$([A] + [B])^T = [A]^T + [B]^T;$$

- ▷ la matrice trasposta di un prodotto è uguale al prodotto delle matrici trasposte in ordine inverso:

$$([A][B])^T = [B]^T [A]^T;$$

2.4 Matrici inverse

Si definisce matrice *inversa* di una data matrice quadrata, una matrice che moltiplicata a sinistra o a destra per la matrice data fornisce la matrice unitaria.

Si indichi con $[A]^{-1}$ la matrice inversa della matrice $[A]$. Dalla definizione di matrice inversa si ha:

$$[A][A]^{-1} = [A]^{-1}[A] = [1];$$

dove con $[1]$ si è indicata la matrice unitaria. La ricerca dell'inversa di una matrice è detta *inversione* di detta matrice e costituisce uno dei problemi centrali nel campo del calcolo numerico.

Una matrice quadrata si chiama *regolare* se il suo determinante è diverso da zero. In caso contrario, essa si chiama *singolare*.

Teorema 1: *tutte le matrici regolari possiedono una matrice inversa per la regola di Leibniz-Cramer.*

Dimostrazione:

Si consideri una matrice regolare di ordine n :

$$[A] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

il cui determinante $\det[A] = \Delta \neq 0$. Sia poi:

$$[\tilde{A}] = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

dove A_{ij} sono i cofattori (minori con i loro segni) degli elementi corrispondenti a_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, n$). Si ricordi che i cofattori degli elementi della riga i -esima si scrivono come elementi della colonna i -esima, effettuando cioè una operazione di trasposizione.

Dividendo tutti gli elementi dell'ultima matrice per il determinante della matrice $[A]$, ovvero per Δ , si ha:

$$[A]^* = \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{vmatrix}.$$

La matrice $[A]^*$ è la matrice inversa ricercata, infatti.

1. La somma dei prodotti degli elementi di una data riga o colonna del determinante per i cofattori dei suoi elementi è uguale al determinante.
2. La somma dei prodotti degli elementi di una data riga o colonna del determinante

per i cofattori degli elementi rispettivi ad un'altra riga o colonna corrispondenti, è nulla, ovvero:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} A$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} A_{kj} = \delta_{ij} A$$

con:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{per } i = j \\ 0 & \text{per } i \neq j \end{cases}.$$

In virtù di queste proprietà, il prodotto $[A][A]^*$ fornisce il seguente risultato:

$$[A][A]^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = [1].$$

Esempio 5

$$[A] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}; \quad \det[A] = -6 + 9 + 4 - 12 + 18 - 1 = 12$$

$$[A]^{-1} = \begin{vmatrix} -\frac{7}{12} & \frac{9}{12} & -\frac{4}{12} \\ \frac{12}{1} & -\frac{12}{3} & \frac{12}{4} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \end{vmatrix}.$$

Verifica:

$$[A][A]^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\frac{7}{12} & \frac{9}{12} & -\frac{4}{12} \\ \frac{11}{12} & -\frac{9}{12} & \frac{8}{12} \\ \frac{12}{12} & \frac{3}{12} & -\frac{4}{12} \end{vmatrix} = \frac{1}{12} \begin{vmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = [1].$$

2.5 Autovalori ed autovettori di una matrice

Una matrice $[A]$ quadrata di ordine n può essere vista come un operatore che associa ad ogni elemento dello spazio di definizione \mathbf{Re}^n (vettore $\{X\}$ di n componenti) un elemento dello spazio immagine, che coincide con \mathbf{Re}^n essendo la matrice quadrata. Pertanto l'operatore matrice quadrata $[A]$ trasforma un vettore $\{X\}$ in un altro vettore dello stesso spazio.

Un problema che viene spesso affrontato nell'ambito della Scienza delle Costruzioni, è quello di determinare quei vettori che vengono trasformati tramite l'operatore $[A]$ in se stessi, a meno di una costante che ne vari il modulo e/o il verso, ma non la direzione. In termini matematici il problema è di determinare uno scalare λ ed un vettore $\{X\}$ tale che:

$$[A]\{X\} = \lambda\{X\} \quad (2.15)$$

ovvero:

$$([A] - \lambda[1])\{X\} = \{0\}. \quad (2.16)$$

La (2.16) è un sistema omogeneo che ammette la soluzione banale $\{X\} = \{0\}$. Se il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da zero, la soluzione esiste ed è unica. Poiché la banale è soluzione, essa è l'unica soluzione.

Per trovare una soluzione non banale è quindi necessario che:

$$\det([A] - \lambda[1]) = 0. \quad (2.17)$$

La (2.17) è un'equazione di grado n in λ . Si può dimostrare che, se $[A]$ è simmetrica, con coefficienti reali, le n radici sono tutte reali. Queste radici sono chiamate *autovalori* di $[A]$.

Guardando il sistema originario si vede che, se $\{X\}$ è soluzione, anche $\alpha\{X\}$ è soluzione $\forall \alpha \in \mathbf{Re}$. Si hanno quindi ∞^1 soluzioni, comprendenti la soluzione banale $\alpha=0$. Tali soluzioni sono chiamate *autovettori* e sono definite a meno di una costante di proporzionalità α .

Si consideri una matrice quadrata di ordine 3:

$$[A] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad [A] - \lambda[1] = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix};$$

L'equazione di terzo grado in λ

$$\det([A] - \lambda[1]) = 0 \quad (2.18)$$

conduce alla seguente equazione:

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 - I_2\lambda - I_3 = 0 \quad (2.19)$$

dove:

▷ $I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ è l'invariante di primo grado (traccia di $[A]$):

$$\text{▷ } I_2 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

invariante di secondo grado (somma dei minori principali)

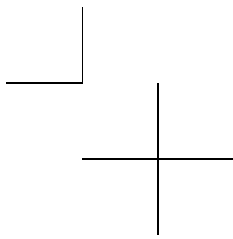
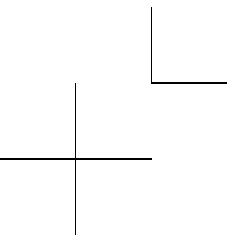
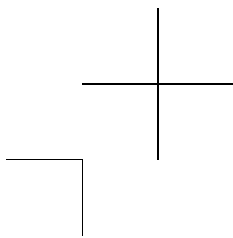
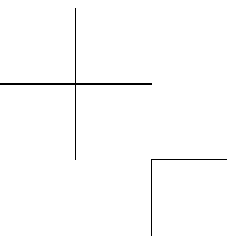
▷ $I_3 = \det [A]$ invariante di terzo grado.

Risolvendo la (2.18) si ricavano tre scalari λ_1 , λ_2 e λ_3 , che nell'ipotesi di matrice $[A]$ simmetrica risultano numeri reali. Per ciascuno dei tre λ_i , detti *autovalori* della matrice $[A]$ così determinati, sostituendo di volta in volta uno dei λ_i nel sistema omogeneo (2.15) vengono determinati tre vettori $\{X_i\}$, distinti fra loro se i λ_i sono distinti. Nell'ipotesi di matrice simmetrica tali vettori, detti *autovettori*, definiscono tre direzioni normali fra loro, se gli autovalori sono distinti.

Operando poi una trasformazione del sistema di riferimento rispetto al quale è espressa la matrice $[A]$ al sistema di riferimento definito dai tre autovettori, la matrice $[A]$ assume una forma diagonale ed i termini posti sulla diagonale principale risultano essere proprio i tre autovalori λ_1 , λ_2 e λ_3 precedentemente determinati.

Detta $[A^*]$ la matrice $[A]$ riferita al sistema di riferimento suddetto, essa assume la seguente forma:

$$[A^*] = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}$$



Capitolo 3

I vettori applicati

3.1 Premesse

Si definisce *vettore applicato* la coppia ordinata formata da un vettore libero e da un punto di applicazione e si indica con $(A, \{u\})$. La retta r passante per A (punto di applicazione) ed avente la direzione di $\{u\}$ si dice *retta di azione* di $\{u\}$.

Per la sua identificazione, accanto al simbolo $(A, \{u\})$, si può usare la notazione $\{u\} = \{P - A\}$, in cui le lettere maiuscole indicano gli estremi di un segmento orientato AP che rappresenta appunto il vettore (fig.3.1) applicato in A con secondo estremo in P .

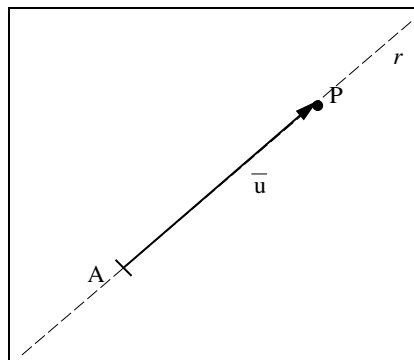


Figura 3.1

Per i vettori applicati valgono le regole di calcolo dei vettori liberi, considerando i vettori applicati come vettori liberi. Il risultato delle operazioni eseguite sui vettori applicati, se è un vettore, è comunemente un vettore libero. Spesso però risulta conveniente applicare tale vettore in punti opportuni. Tale circostanza va in ogni caso esplicitamente precisata.

3.2 Momento di un vettore applicato rispetto ad un polo

Si consideri un vettore $\{u\}$ applicato in A , $(A, \{u\})$, ed un punto O dello spazio tridimensionale e sia r la sua retta d'azione; sia $\{A - O\}$ il vettore posizione di A rispetto ad O (detto *polo*). Si definisce *vettore momento* di $(A, \{u\})$ rispetto al polo O , il vettore $\{M(O)\}$ così espresso:

$$\{M(O)\} = \{A - O\} \wedge \{u\} \quad (3.1)$$

che, conformemente alla definizione di prodotto vettoriale, è diretto normalmente al piano π definito dalla retta r e dal punto O ed ha verso tale che, ad un osservatore posto in O ed orientato come $\{M(O)\}$, il vettore $(A, \{u\})$ appaia levogiro (fig.3.2).

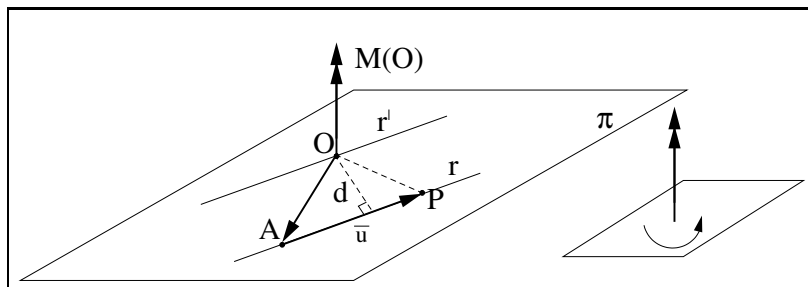


Figura 3.2

Il modulo $|M(O)|$ di $\{M(O)\}$ vale:

$$|M(O)| = |OA| \cdot |u| \sin \phi = |u|d \quad (3.2)$$

ove $\phi < \pi$ è l'angolo compreso fra i vettori $\{u\}$ e $\{A - O\}$, $|OA|$ ed $|u|$ sono rispettivamente i moduli di $\{A - O\}$ ed $\{u\}$ mentre d è la distanza della retta r da O , detta comunemente *braccio* di $(A, \{u\})$ rispetto ad O .

Il vettore momento lo si considera applicato nel polo (pur essendo un vettore libero) e lo si rappresenta con una doppia freccia.

Spostando $\{u\}$ lungo la sua retta di azione, ovvero facendo subire ad esso uno scorrimento, il momento $\{M(O)\}$ non cambia. Analogamente, se si sposta il polo lungo una retta r' parallela ad r , il momento resta invariato. Il modulo del momento è infatti sempre pari al doppio dell'area del triangolo POA indicato in fig.3.2, giacente sul piano π . Esso è nullo se è nullo il modulo di $\{u\}$ o se il polo O giace sulla retta di azione del vettore stesso (d nullo).

3.3 Risultante e momento risultante di un sistema di vettori applicati

Sia \mathcal{S} un sistema di vettori applicati $(A_1, \{u_1\}), (A_2, \{u_2\}) \dots (A_n, \{u_n\})$. Si definisce *risultante* del sistema \mathcal{S} il vettore somma dei vettori $\{u_i\} (i = 1, \dots, n)$

$$\{R\} = \sum_{i=1}^n \{u_i\} \quad (3.3)$$

Si dice *momento risultante* rispetto al polo O il vettore somma dei vettori momenti di ciascun vettore del sistema rispetto al polo O :

$$\{M(O)\} = \sum_{i=1}^n \{M_i(O)\} = \sum_{i=1}^n \{A_i - O\} \wedge \{u_i\} \quad (3.4)$$

Dalla (3.3) e (3.4) si deduce come il risultante ed il momento risultante di un sistema non varino se si sposti un vettore lungo la propria retta d'azione.

Si consideri ora un polo $O' \neq O$ e si voglia determinare la legge con cui varia il momento risultante al variare del polo. Il momento risultante rispetto al polo O' vale:

$$\{M(O')\} = \sum_{i=1}^n \{A_i - O'\} \wedge \{u_i\} \quad (3.5)$$

Poiché è possibile scrivere:

$$\{A_i - O'\} = \{A_i - O\} + \{O - O'\} \quad (3.6)$$

sostituendo la (3.6) nella (3.5) si ottiene:

$$\begin{aligned} \{M(O')\} &= \sum_{i=1}^n [\{A_i - O\} + \{O - O'\}] \wedge \{u_i\} = \\ &= \sum_{i=1}^n [\{A_i - O\} \wedge \{u_i\} + \{O - O'\} \wedge \{u_i\}] = \\ &= \sum_{i=1}^n \{A_i - O\} \wedge \{u_i\} + \sum_{i=1}^n \{O - O'\} \wedge \{u_i\} = \\ &= \{M(O)\} + \{O - O'\} \wedge \sum_{i=1}^n \{u_i\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Sostituendo la (3.3) nella (3.7) in definitiva si ha:

$$\{M(O')\} = \{M(O)\} + \{O - O'\} \wedge \{R\} \quad (3.8)$$

Il momento risultante di un sistema S di vettori applicati rispetto ad un polo O' è pertanto pari alla somma del momento risultante di S rispetto al polo O e del momento, rispetto ad O' del risultante $\{R\}$ applicato in O . Dalla (3.8) si nota come se $\{O - O'\}$ ed $\{R\}$ risultino paralleli $\Rightarrow \{M(O')\} = \{M(O)\}$. Se pertanto il polo viene spostato lungo una retta parallela al risultante del sistema, il momento risultante non varia.

Si noti che, essendo il vettore momento risultante di un sistema di vettori applicati definito per ciascun punto del dominio tridimensionale, nell'ipotesi di applicare il vettore momento risultante nel polo rispetto a cui è valutato, l'insieme di tutti i vettori momenti risultanti forma un campo vettoriale detto *campo vettoriale dei momenti risultanti*.

3.4 Sistemi di vettori a risultante nullo

Si consideri un sistema \mathcal{S} di vettori applicati $(A_i, \{u_i\})$ per cui si verifichi:

$$\{R\} = \sum_{i=1}^n \{u_i\} = \{0\} \quad (3.9)$$

In tal caso, la legge di trasposizione dei momenti (3.8) fornisce:

$$\{M(O')\} = \{M(O)\} = \{M\}$$

essendo nullo il termine $\{O - O'\} \wedge \{R\}$ per l'annullarsi di $\{R\}$. Per un sistema a risultante nullo, il momento risultante non varia al variare del polo. Per tali sistemi, il campo vettoriale dei momenti è costituito da elementi tutti uguali (campo uniforme di momenti).

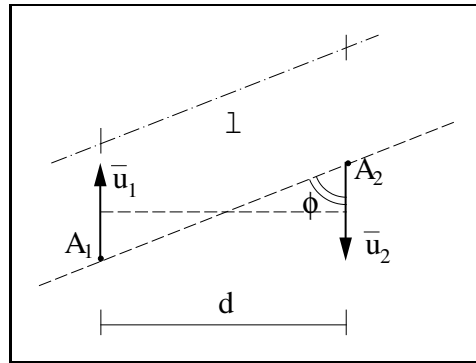


Figura 3.3

Fra i sistemi a risultante nullo, riveste particolare importanza quello formato da due vettori $(A_1, \{u_1\})$ e $(A_2, \{u_2\})$ aventi lo stesso modulo, stessa direzione e verso opposto $\Rightarrow \{R\} = \{0\}$. Tale sistema viene indicato con il nome di *coppia* (fig.3.3).

Si valuti il momento risultante rispetto al polo A_1 .

$$\{M(A_1)\} = \{A_1 - A_1\} \wedge \{u_1\} + \{A_2 - A_1\} \wedge \{u_2\} = \{A_2 - A_1\} \wedge \{u_2\}$$

Il vettore momento è normale al piano di $\{u_1\}$ e $\{u_2\}$ (sono complanari poichè paralleli) ed il modulo vale:

$$|M(A_1)| = l \cdot |u_2| \sin \phi = |u_2| \cdot d = |u_1| \cdot d \quad (3.10)$$

dove d è la distanza fra le due rette d'azione dei vettori (detto braccio della coppia). Il momento della coppia è certamente uguale a $|u| \cdot d$ rispetto a qualsiasi polo, dal momento che $\{R\} = \{0\}$.

Un sistema per il quale oltre che $\{R\} = \{0\}$ si verifichi, rispetto ad un generico polo O , anche $\{M(O)\} = \{0\}$ si dice *sistema nullo* (o sistema *equilibrato*). Per esso si verifica l'annullamento del momento risultante rispetto a tutti i poli possibili (campo vettoriale di momenti nullo).

3.5 Sistemi di vettori a risultante non nullo

3.5.1 L'invariante scalare

Si prenda in considerazione la legge di trasposizione del momento risultante di un sistema di vettori applicati:

$$\{M(O')\} = \{M(O)\} + \{O - O'\} \wedge \{R\}. \quad (3.11)$$

Moltiplicando ambo i membri della (3.11) scalarmente per il vettore risultante $\{R\}$ si ottiene:

$$\{M(O')\} \times \{R\} = \{M(O)\} \times \{R\} + [\{O - O'\} \wedge \{R\}] \times \{R\}. \quad (3.12)$$

Mentre la (3.11) è un'equazione vettoriale, essendo ambo i membri vettori, la (3.12) risulta un'equazione scalare. L'ultimo addendo della (3.12) rappresenta il prodotto scalare fra il vettore $\{O - O'\} \wedge \{R\}$ ed il vettore $\{R\}$, ovvero il prodotto scalare fra due vettori fra loro normali. Pertanto tale addendo risulta nullo e dunque si ottiene:

$$\{M(O)\} \times \{R\} = \{M(O')\} \times \{R\} = \mathcal{I}. \quad (3.13)$$

Da un punto di vista geometrico si può affermare che la *proiezione del vettore momento*, valutata rispetto ad un qualsiasi polo, *nella direzione del risultante $\{R\}$ del sistema*:

$$\mathcal{I} = \{M(O)\} \times \{R\} \quad (3.14)$$

è costante e si chiama *invariante scalare* del sistema, laddove $\{R\}$ rappresenta l'invariante vettoriale.

La rappresentazione geometrica è la seguente (fig.3.4): sia r una retta parallela ad $\{R\}$ nello spazio e siano $\{M(O)\}$ ed $\{M(O')\}$ i vettori momento del sistema relativi rispettivamente ad O ed O' . La proiezione del vettore momento nella direzione di $\{R\}$ è costante. Ciascun vettore momento può quindi considerarsi come somma di un vettore costante $\{P\} = \{P(O)\} = \{P(O')\}$ parallelo alla direzione di $\{R\}$ e di un vettore variabile con il polo $\{N(O)\}$ normale ad $\{R\}$:

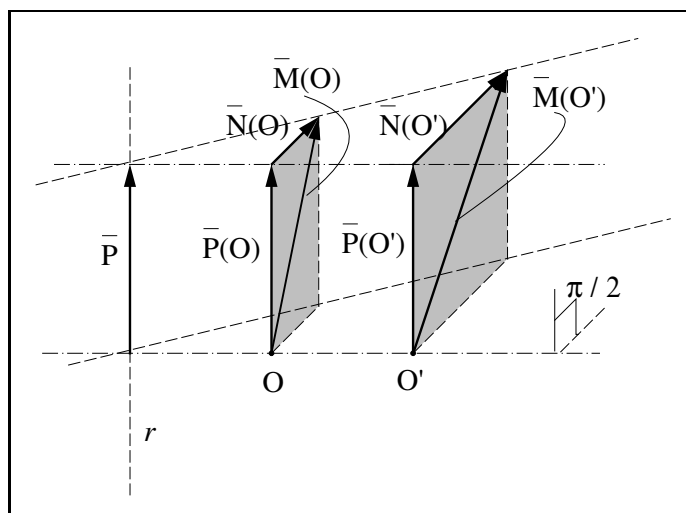


Figura 3.4

$$\{M(O)\} = \{P\} + \{N(O)\} \quad (3.15)$$

Nel caso in cui $\{P\} = 0$, tutti i vettori del campo vettoriale dei momenti risultano costituiti dalla sola parte variabile $\{M(O)\} = \{N(O)\}$ e si conservano normali a $\{R\}$. Ciò si verifica sempre per i sistemi piani. In tal caso, infatti, il vettore $\{R\}$ è contenuto sempre nel piano dei vettori del sistema mentre ogni vettore momento risultante è sempre normale a tale piano, per cui:

$$\mathcal{I} = \{M(O)\} \times \{R\} = 0 \quad (3.16)$$

L'invariante scalare può esprimersi mediante le componenti cartesiane dei vettori $\{M(O)\}$ ed $\{R\}$ come segue:

$$\mathcal{I} = M_x R_x + M_y R_y + M_z R_z \quad (3.17)$$

che prende il nome di *trinomio invariante* del sistema. Nel caso di sistemi piani, posto xy come piano dei vettori, risulta $M_x = M_y = 0$; $R_z = 0$.

3.5.2 Asse centrale del sistema

Si consideri un sistema \mathcal{S} di vettori applicati nello spazio tridimensionale. Si vuole definire l'insieme di punti rispetto al quale il vettore momento si riduce al solo vettore $\{P\}$ parallelo al vettore risultante $\{R\}$. Come si osserva dalla fig. ??, il modulo del vettore momento risultante diviene così minimo. Riprendendo la legge di trasposizione

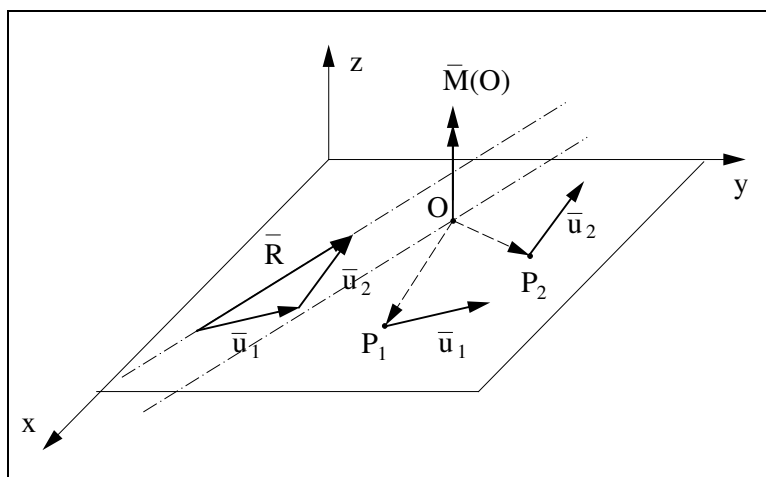


Figura 3.5

dei momenti si ha:

$$\{M(O')\} = \{M(O)\} + \{O - O'\} \wedge \{R\} = \{P\} + \{N(O)\} + \{O - O'\} \wedge \{R\}. \quad (3.18)$$

Un punto O' per cui si verifica che:

$$\{N(O)\} + \{O - O'\} \wedge \{R\} = 0, \quad (3.19)$$

rappresenta un polo per cui $\{M(O')\} = \{P\}$. Spostando il polo parallelamente al risultante, il momento risultante non cambia; l'insieme dei punti ricercato è dunque costituito dalla retta parallela ad $\{R\}$ passante per O' . Tale retta si chiama *asse centrale del sistema*. Per la determinazione del punto O' si deve risolvere l'equazione vettoriale (3.19).

Nel caso di sistemi piani, l'asse centrale risulta essere il luogo dei punti rispetto ai quali si annulla il modulo del vettore momento risultante. Poichè per i sistemi piani $\{P\} = 0$, il valore minimo di $\{M(O)\}$ è zero.

3.6 Sistemi equivalenti di vettori

Dati due sistemi \mathcal{S} ed \mathcal{S}' di vettori applicati aventi rispettivamente risultante $\{R\}$ ed $\{R'\}$ e momento risultante, rispetto ad un generico polo O , $\{M(O)\}$ ed $\{M'(O)\}$, essi si definiscono *equivalenti* se e solo se i due sistemi hanno lo stesso risultante e lo stesso momento risultante rispetto a tutti i possibili poli.

Teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinché due sistemi \mathcal{S} ed \mathcal{S}' siano equivalenti e che siano verificate le due equazioni vettoriali:

$$\{R\} = \{R'\}; \quad \{M(O)\} = \{M'(O)\}, \quad (3.20)$$

dove O è un polo arbitrario.

Dimostrazione.

Si applichi la legge di trasposizione dei momenti (3.8) al polo prescelto O e ad un altro generico polo Q :

$$\begin{aligned} \{M(Q)\} &= \{M(O)\} + \{O - Q\} \wedge \{R\} \\ \{M'(Q)\} &= \{M'(O)\} + \{O - Q\} \wedge \{R'\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Per le (3.20) si ha che: $\{M(Q)\} = \{M'(Q)\}$. Viceversa, se i due sistemi sono equivalenti, per le (3.21) risultano verificate le (3.20).

Esplicitando la notazione matriciale in componenti cartesiane $\{R\} = \{R'\}$ risulta:

$$\begin{vmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R'_x \\ R'_y \\ R'_z \end{vmatrix};$$

mentre $\{M(O)\} = \{M'(O)\}$ risulta:

$$\begin{vmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M'_x \\ M'_y \\ M'_z \end{vmatrix}.$$

Nel caso piano si ha:

$$\begin{vmatrix} R_x \\ R_y \\ M_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R'_x \\ R'_y \\ M'_z \end{vmatrix};$$

pertanto, in questo caso, l'equazione vettoriale dei momenti può essere sostituita da un'equazione scalare, essendo presente la sola componente del vettore momento lungo z .

Dalle condizioni di equivalenza risulta che un generico sistema di vettori applicati \mathcal{S} è sempre equivalente al sistema \mathcal{S}' costituito dal risultante $\{R\}$ di \mathcal{S} applicato in un qualsiasi punto Q e da una coppia di momento $\{M(Q)\}$ pari al momento risultante del sistema \mathcal{S} rispetto al polo Q . Se Q è un punto dell'asse centrale, il sistema equivalente sarà costituito, oltre che dal risultante $\{R\}$ applicato in Q , da una coppia di intensità minima. Dalle condizioni di equivalenza è possibile, assegnato un certo sistema di vettori, costruirne un altro ad esso equivalente attraverso una o più delle seguenti operazioni:

- ▷ aggiungere o sopprimere al sistema di partenza due vettori uguali e contrari agenti sulla stessa retta d'azione;

- ▷ traslare un qualsiasi vettore lungo la propria retta d'azione;
- ▷ comporre i vettori complanari a due a due;
- ▷ scomporre un vettore secondo due direzioni.

Un sistema \mathcal{S} di vettori applicati per cui sia nullo il risultante ed il momento risultante rispetto ad un polo qualsiasi:

$$\{R\} = \begin{vmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{vmatrix} = \{0\}, \quad \{M(O)\} = \begin{vmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{vmatrix} = \{0\};$$

si dice *sistema nullo* o *sistema equivalente a zero*.

Dato un sistema \mathcal{S} di vettori applicati avente risultante $\{R\}$ e momento risultante $\{M(O)\}$ rispetto ad un qualsiasi polo O , si dice *sistema equilibrante* del sistema \mathcal{S} il sistema \mathcal{S}' , di risultante $\{R'\}$ e momento risultante $\{M'(O)\}$ rispetto allo stesso polo O , il sistema tale per cui:

$$\{R\} + \{R'\} = \{0\} \quad \{M(O)\} + \{M'(O)\} = \{0\}$$

Se \mathcal{S} è equilibrante di \mathcal{S}' , il sistema costituito dall'insiemi dei vettori di \mathcal{S} e di \mathcal{S}' , risulta un sistema nullo.

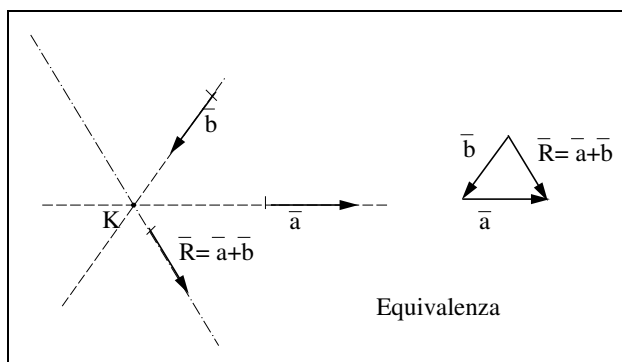


Figura 3.6

3.7 Sistemi piani di vettori applicati

I sistemi piani di vettori applicati sono quei sistemi in cui tutti i vettori sono rappresentabili da segmenti orientati contenuti in un piano. Il vettore momento risultante rispetto ad un qualsiasi polo del piano risulta normale al piano stesso. Pertanto si ha sempre $\mathcal{I}=0$, ovvero il trinomio invariante relativo al sistema è nullo.

Un sistema piano di vettori applicati con risultante non nullo ($\{R\} \neq \{0\}$) è equivalente al solo vettore risultante applicato all'asse centrale.

Teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinché due sistemi di vettori piani con $\{R\} \neq \{0\}$ siano equivalenti, è che abbiano lo stesso risultante e lo stesso asse centrale.

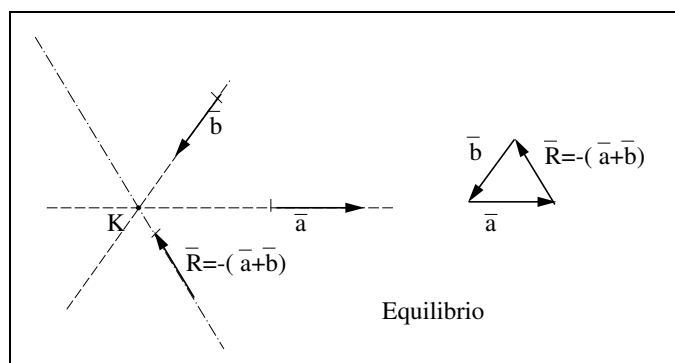


Figura 3.7

Nel caso di un sistema piano di vettori applicati con $\{R\} = \{0\}$, esso è equivalente ad una coppia avente momento pari al momento del sistema rispetto ad un polo arbitrario del piano. Come già osservato, l'asse centrale per i sistemi piani è quella retta luogo dei punti rispetto ai quali il momento del sistema è nullo.

3.7.1 Sistemi di vettori paralleli

I sistemi di vettori piani paralleli possono esseri visti come sistemi qualsiasi di vettori concorrenti in un punto (in questo caso improprio). Si consideri un sistema piano di vettori paralleli con $\{R\} \neq \{0\}$: esso è equivalente al solo risultante applicato all'asse centrale che è una retta parallela alla direzione comune.

3.8 Studio grafico dei sistemi piani di vettori

Quando si utilizzano metodi grafici è necessario condurre le operazioni grafiche rispettando le *scale* di disegno stabilite a priori. Per lo studio grafico di sistemi di vettori, è necessario stabilire una *scala delle distanze* ed una *scala delle intensità dei vettori*. Dal momento che i vettori rappresentano grandezze vettoriali, quali spostamenti, forze, velocità, accelerazioni, la scala di intensità mette in relazione l'unità di lunghezza del segmento orientato rappresentativo del vettore, con l'unità di intensità della grandezza vettoriale rappresentata.

Il presente studio grafico è finalizzato alla ricerca dell'asse centrale e alla riduzione di un sistema piano qualsiasi ad un sistema costituito o da un solo vettore o una coppia.

La condizione di equivalenza per due sistemi piani di vettori con $\{R\} \neq \{0\}$ afferma che essi devono avere lo stesso risultante e lo stesso asse centrale. Nel caso di sistemi

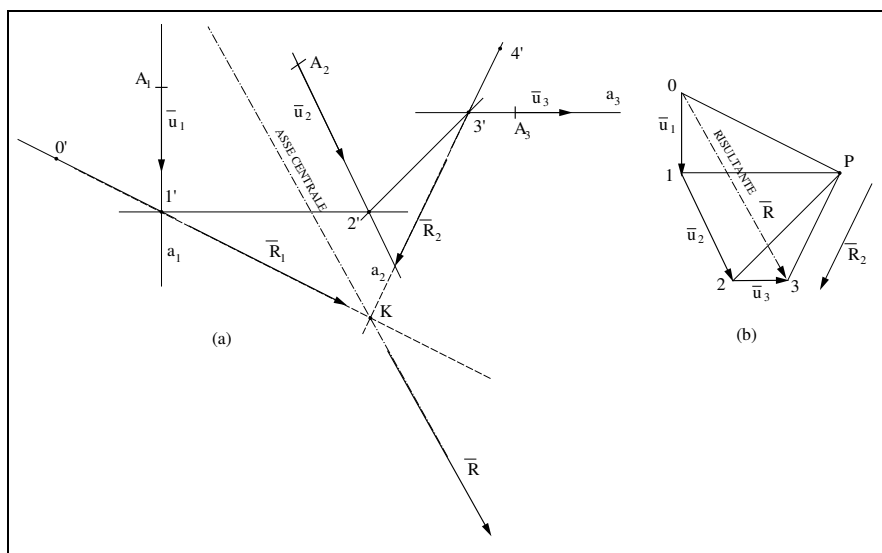


Figura 3.8

piani, l'asse centrale è quella retta luogo dei punti rispetto a cui il momento del sistema è nullo: essa è parallela al risultante del sistema. Nel caso di un solo vettore, l'asse centrale coincide con la retta d'azione del vettore stesso. Determinato l'asse centrale di un sistema S di vettori applicati, con $\{R\} \neq \{0\}$, si costruisce un sistema S' equivalente di S , e costituito dal solo risultante, applicando quest'ultimo sull'asse centrale. Tale operazione è detta di *riduzione* ed il sistema si dice *ridotto* ad un solo vettore applicato.

3.8.1 Riduzione di due vettori non paralleli

Siano $\{a\}$ e $\{b\}$ due vettori complanari, e sia K il punto di incontro fra le due rette di azione (fig.3.6). Rispetto a K il momento del sistema è nullo, essendo nulli i bracci dei vettori. Pertanto K appartiene all'asse centrale. Dovendo poi l'asse centrale essere parallelo al risultante, è sufficiente tracciare per K la parallela al risultante. Tale retta è l'asse centrale del sistema. In fig.3.6 è riportato lo schema equivalente. Per ottenere il sistema S' che equilibra il sistema S costituito dai vettori $\{a\}$ e $\{b\}$, esso risulta l'opposto del sistema equivalente. Nel caso di problema di equilibrio pertanto le frecce dei vettori si inseguono (fig.3.7).

3.8.2 Il poligono funicolare

Si consideri un sistema piano S di vettori applicati non paralleli con $\{R\} \neq \{0\}$ ($\{A_i, \{u_i\}\}$ con $i = 1, 2, 3$ e siano a_i le rispettive rette di azione dei singoli vettori. Dal momento che, nei problemi di riduzione dei sistemi di vettori, conta la retta di applicazione e non il punto di applicazione, il sistema S si può indicare con $(a_i, \{u_i\})$, $i = 1, 2, 3$.

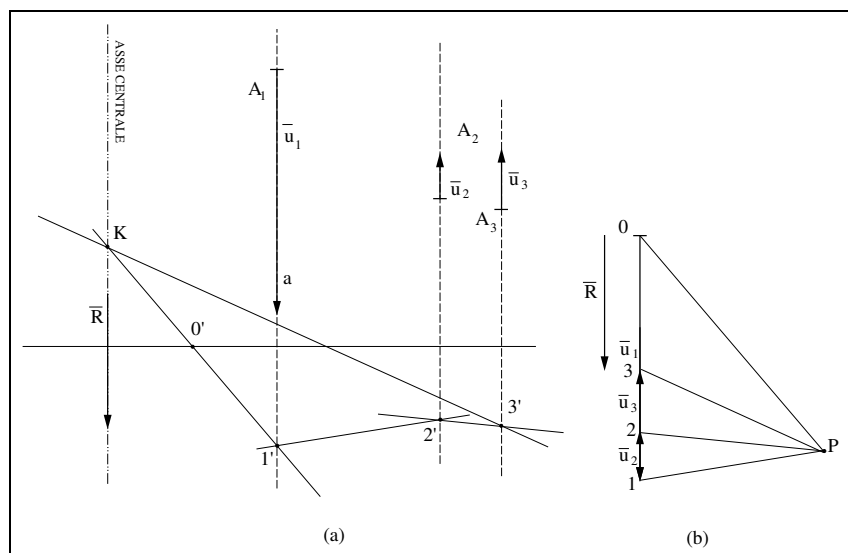


Figura 3.9

Si rappresenti il sistema in una opportuna scala e si costruisca il *poligono dei vettori* (fig.3.8.b). Da un punto P , detto polo, prescelto con l'unica condizione di non appartenere ad alcuna delle rette cui appartengono i lati del poligono dei vettori, si proiettino i vertici $0, 1, \dots, n$ di detto poligono. Si ottengono così le rette proiettanti $P0, P1, \dots, Pn$. Da un punto O' si porti una retta parallela alla prima proiettante $P0$ e si indichi con $1'$ la sua intersezione con la retta a_1 del vettore $\{u_1\}$. Dal punto $1'$ si conduca la parallela alla seconda proiettante $P1$ e si indichi con $2'$ l'intersezione con la retta a_2 del vettore $\{u_2\}$ e così via.

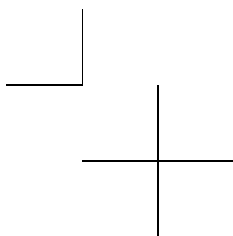
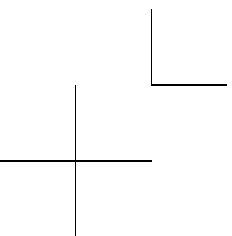
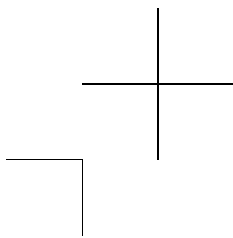
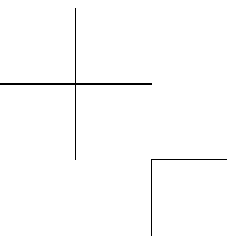
Si viene così a costruire una nuova poligonale $0', 1', 2', 3'$ e $4'$ che viene denominata *poligono funicolare*. Le rette $0'1', 1'2'$ vengono chiamate lati del poligono.

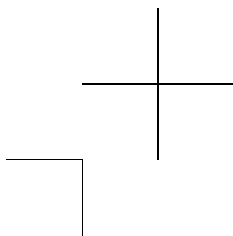
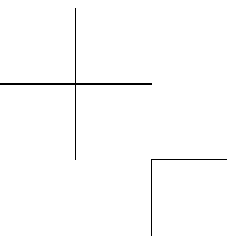
Il risultante del sistema $\{R\}$, come si evince osservando il poligono delle forze, può essere visto come il risultante dei vettori $\{P - 0\} = \{\vec{R}_1\}$ e $\{3 - P\} = \{\vec{R}_2\}$ aventi direzioni parallele alle rette passanti per $0'1'$ e $4'3'$ (fig.3.8.a), rispettivamente primo ed ultimo lato del poligono funicolare.

In definitiva, si è ottenuto un caso analogo al punto precedente 3.8.1 di riduzione di due vettori. L'asse centrale si ottiene dunque prolungando il primo e l'ultimo lato del poligono funicolare fino a determinare il loro punto di incontro (punto K) e tracciando per K la parallela al risultante. Al variare del polo, l'asse centrale non cambia. Una verifica alla determinazione grafica dell'asse centrale consiste nel ripetere la costruzione del poligono, variando la scelta del polo. Si dovrebbe ottenere, a meno di errori, un punto K' appartenente allo stesso asse centrale precedentemente determinato, pur ottenendo un diverso poligono funicolare.

Analoga costruzione può essere effettuata qualora si voglia determinare l'asse cen-

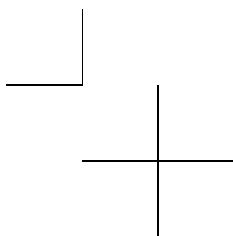
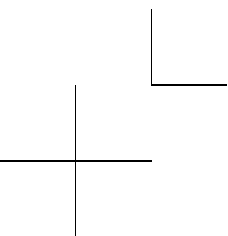
trale di un sistema di vettori paralleli. In tal caso, l'asse centrale risulta ovviamente parallelo alla direzione comune dei vettori. In fig. 3.9 è riportata la costruzione grafica per il caso in esame.

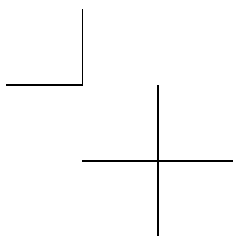
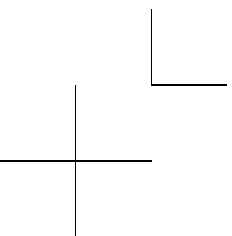
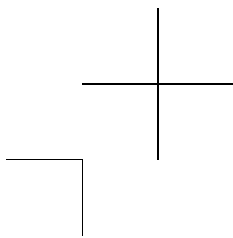
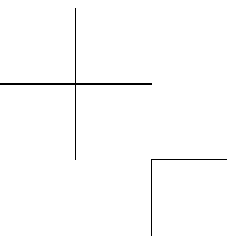




Parte II

Esercizi





Capitolo 4

Strutture isostatiche

4.1 Esercizio n.4.1 (Arco a tre cerniere)

Per la struttura in figura 4.1, posto $l = 4$ m e $q = 20$ kN/m, determinare:

- le reazioni vincolari;
- i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione M, N e T;
- la curva delle pressioni;
- il momento in A mediante il P.L.V.

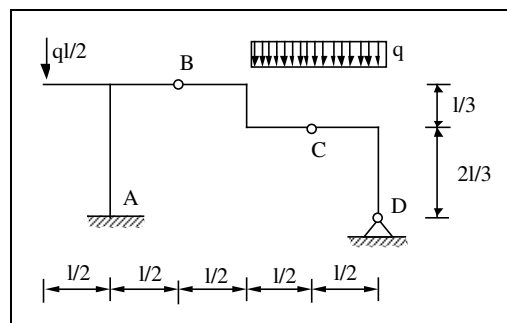


Figura 4.1

4.1.1 Calcolo delle reazioni vincolari

Al fine di evitare di dover risolvere un sistema di equazioni di ordine $(g \times v)$ dove $v=9$ è il grado di vincolo e $g=9$ il numero di gradi di libertà (ovviamente $g=v$ dal momento che

la struttura è isostatica) è necessario ricorrere alle equazioni ausiliarie. La scrittura di tali equazioni risulta particolarmente efficace qualora si riesca ad ottenere per ciascuna equazione un'unica incognita. Lavorando in componenti orizzontali e verticali, per la struttura in esame, ciò non è possibile. Pertanto risulta conveniente ricorrere al PLV al fine di determinare una componente di una reazione e successivamente operare con le equazioni ausiliarie.

Si voglia primariamente determinare la componente orizzontale della reazione della cerniera in D . Si degrada il vincolo introducendo, al posto della cerniera, un carrello a scorrimento orizzontale e si introduce la reazione incognita cercata X . Si ottiene pertanto il seguente schema labile, riportato in figura 4.2.

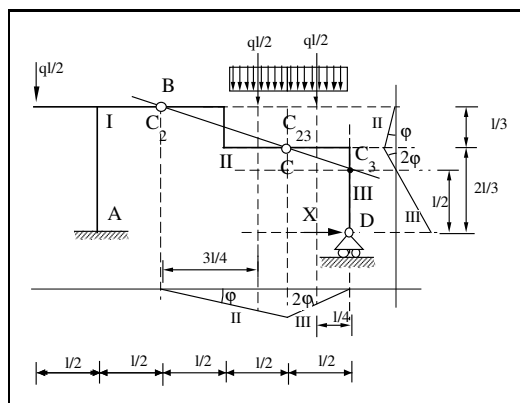


Figura 4.2

Il tratto I, essendo vincolato in A con un incastro, non ha centro assoluto di rotazione (non subisce atti di moto rigido). La cerniera interna in B può pertanto essere considerata come cerniera esterna e costituire il centro assoluto di rotazione per il tratto II, C_2 . La cerniera interna in C rappresenta il centro relativo di rotazione $C_{2,3}$. Essendo la struttura cinematicamente costituita da due tratti (il tratto I è fisso), il primo teorema delle catene cinematiche impone l'allineamento dei centri C_2 , $C_{2,3}$ e C_3 . C_3 coincide pertanto con il punto di intersezione tra la retta passante per C_2 e $C_{2,3}$ e la retta passante per D ortogonale alla direzione di scorrimento del carrello. Tale punto dista $\frac{l}{2}$ da D . Noti i centri assoluti e relativi, si ipotizzi per il tratto II una rotazione oraria φ intorno al proprio centro assoluto di rotazione. Il tratto III ruoterà rigidamente di un angolo pari a 2φ in senso antiorario, essendo la distanza tra C_2 e $C_{2,3}$ doppia rispetto alla distanza tra C_3 e $C_{2,3}$. In figura 4.2 è riportato il diagramma degli spostamenti orizzontali e verticali dovuti alla rotazione arbitraria φ del tratto II. L'applicazione del PLV porge allora la seguente equazione di equilibrio:

$$L_{VE} = 0 \Rightarrow \frac{ql}{2} \times \frac{3}{4}l \times \varphi + \frac{ql}{2} \times \frac{1}{4}l \times 2\varphi + X \times \frac{1}{2}l \times 2\varphi = 0$$

$$X = -\frac{3}{8}ql - \frac{ql}{4} = -\frac{5}{8}ql \quad (4.1)$$

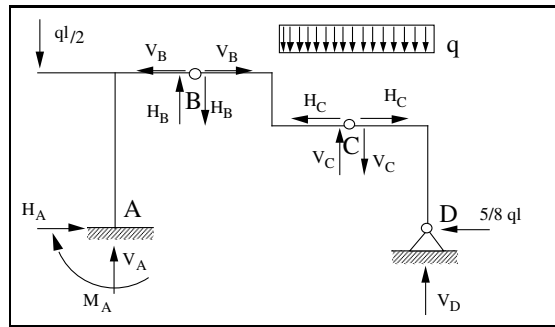


Figura 4.3

Il segno negativo di X indica che la componente orizzontale della cerniera in D è diretta verso sinistra, ovvero è opposta a quella ipotizzata arbitrariamente a priori. Si osservi come il carico distribuito non possa essere considerato globalmente con la risultante applicata in C pari a ql e con spostamento pari a $l\varphi$, dal momento che i due tratti orizzontali subiscono rotazioni differenti. Infatti in tal caso si otterrebbe il risultato errato di $H_D = ql$.

Determinata la componente orizzontale della reazione in D , è possibile ottenere in cascata tutte le altre. Dall'equilibrio alla traslazione orizzontale del tratto II si ottiene $H_C = \frac{5}{8}ql$ (figura 4.4), mentre dall'equilibrio alla rotazione del tratto III intorno a C si determina la componente verticale in D :

Tratto III:

$$C) \quad -\frac{ql}{2} \times \frac{l}{4} - \frac{5}{8}ql \times \frac{2l}{3} + V_D \times \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow V_D = \frac{ql}{4} + \frac{10}{12}ql = \frac{13}{12}ql \quad (4.2)$$

e dall'equilibrio alla traslazione verticale del tratto III si ottiene:

$$\uparrow) \quad V_C = \frac{ql}{2} - \frac{13}{12}ql = \frac{7}{12}ql \quad (4.3)$$

Le componenti della reazione della cerniera interna in C sono quelle agenti sul tratto III. Quelle agenti sul tratto II sono ovviamente uguali ed opposte. Dall'equazione di equilibrio alla traslazione verticale ed orizzontale per il tratto II si ha:

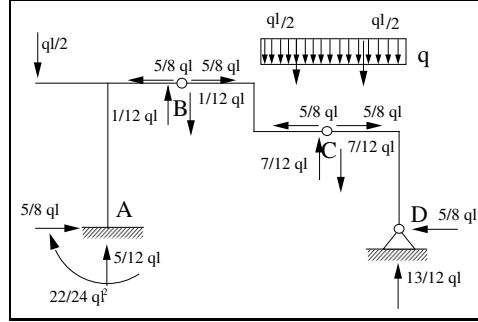


Figura 4.4

$$\left\{ \begin{array}{l} \uparrow) \quad V_B = \frac{7}{12}ql - \frac{ql}{2} = \frac{1}{12}ql \\ \rightarrow) \quad H_B = \frac{5}{8}ql \end{array} \right. \quad (4.4)$$

Analogamente per il tratto I si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \uparrow) \quad V_A = \frac{ql}{2} - \frac{1}{12}ql = \frac{5}{12}ql \\ \rightarrow) \quad H_A = \frac{5}{8}ql \\ A) \quad \frac{ql}{2} \times \frac{l}{2} + \frac{5}{8}ql \times l + \frac{1}{12}ql \times \frac{l}{2} - M_A = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow M_A = ql^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{8} + \frac{1}{24} \right) = \frac{6+5+1}{24}ql^2 = \frac{22}{24}ql^2 \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Per una verifica dei risultati ottenuti è consigliabile scrivere le equazioni cardinali della statica per l'intera struttura. Le reazioni vincolari sono riportate in figura 4.4.

4.1.2 Diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione

Il diagramma del taglio si determina facilmente essendo il taglio costante su tutti i tratti a meno del tratto orizzontale di destra, soggetto al carico distribuito, per il quale si avrà un andamento lineare. Il taglio è positivo quando la risultante delle forze normali all'asse del concio di trave preso in considerazione tende a far ruotare il concio stesso in senso orario. Si ha pertanto taglio negativo pari a $\frac{5}{8}ql=250$ kN nel piedritto di sinistra (la forza H_A tende a far ruotare il pilastro in senso antiorario), taglio negativo pari a $\frac{1}{2}ql=200$ kN nello sbalzo e taglio negativo nel tratto orizzontale di

sinistra, pari a $\frac{1}{12}ql=33$ kN. Si osservi come non si abbia discontinuità nel diagramma in corrispondenza della cerniera. Il taglio è positivo nel tratto verticale centrale pari a $\frac{5}{8}ql=250$ kN, negativo lungo il tratto orizzontale di destra con valore pari a $\frac{1}{12}ql=33$ kN a sinistra e $\frac{13}{12}ql=433$ kN a destra ed infine $\frac{5}{8}ql=250$ kN per il piedritto di destra. In figura 4.5 è riportato il diagramma in scala del taglio adimensionalizzato, avendo diviso i valori ottenuti per $\frac{1}{24}ql$.

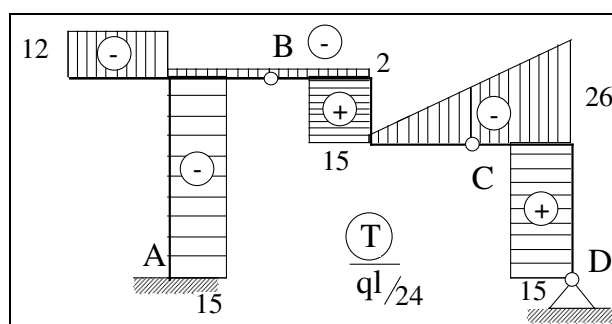


Figura 4.5

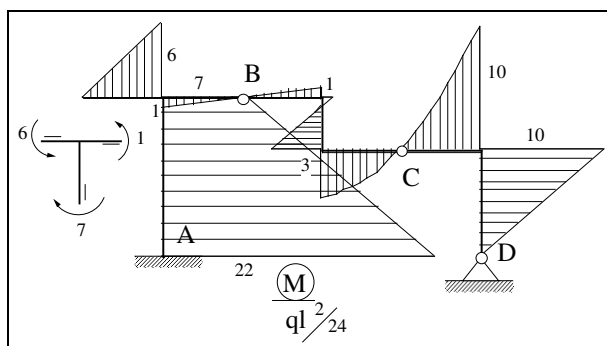


Figura 4.6

Il diagramma del momento flettente, avente per derivata il taglio, ha andamento lineare in tutti i tratti ad eccezione di quello soggetto a carico distribuito, dove si ha invece un andamento parabolico. Il diagramma in scala e normalizzato rispetto al momento $\frac{1}{24}ql^2$ è riportato in fig4.6. Il tracciamento di tale diagramma si determina facilmente tenendo presente i seguenti accorgimenti:

- ▷ il diagramma del momento flettente si riporta dalla parte delle fibre tese, evitando così di mettere il segno;

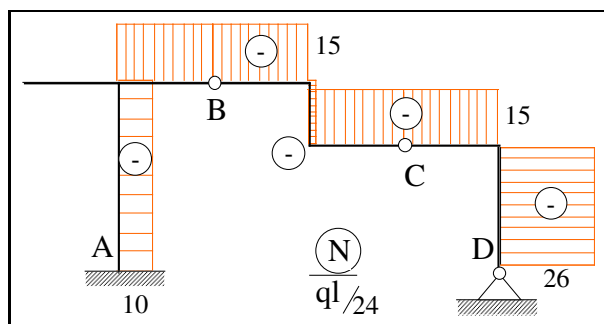


Figura 4.7

- ▷ in corrispondenza del nodo triplo, dove inizia lo sbalzo di sinistra, la somma dei momenti flettenti deve essere pari a zero;
- ▷ il diagramma in corrispondenza delle due cerniere interne si annulla e porge pendenza uguale a monte e a valle della cerniera stessa.

Il diagramma dello sforzo normale, anch'esso in scala e adimensionalizzato, è riportato in figura 4.7. Si osservi come tutti i tratti siano sollecitati da uno sforzo negativo (di compressione) mentre lo sbalzo non è soggetto a sforzo normale.

4.1.3 Deformata elastica

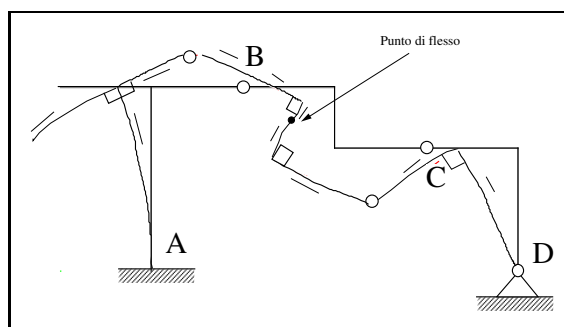


Figura 4.8

La deformata elastica qualitativa viene tracciata non considerando le deformazioni relative allo sforzo normale, essendo trascurabili se rapportate agli spostamenti causati dal momento flettente. Per il tracciamento della deformata si consideri quanto segue:

- ▷ la deformata deve essere congruente con i vincoli esterni, ovvero la sezione in A non può traslare nè ruotare, mentre la sezione in D può soltanto ruotare;
- ▷ le fibre tese del piedritto di sinistra, dal momento che la sezione di incastro non può ruotare, indicano uno sbandamento della struttura verso sinistra essendo tese le fibre di destra. L'estremo di tale piedritto, per l'ipotesi precedentemente fatta, non subisce traslazioni verticali;
- ▷ devono essere conservati gli angoli (in questo caso tutti retti) tra le travi in corrispondenza dei nodi della struttura, considerati come degli incastri interni. L'estremità del piedritto ruota in senso antiorario e pertanto anche le due estremità delle travi ivi afferenti subiscono la stessa rotazione antioraria, mantenendo l'ortogonalità tra esse. La cerniera in B trasla verso sinistra della stessa quantità del nodo triplo, e così via;
- ▷ in corrispondenza delle cerniere interne, le sezioni delle travi ivi afferenti subiscono gli stessi spostamenti, ma possono avere rotazioni relative.

La deformata elastica della struttura è riportata in figura 4.8.

4.1.4 Curva delle pressioni

La curva delle pressioni, che rappresenta l'involuppo delle risultanti delle reazioni vincolari interne per ciascuna sezione della struttura, è riportata in figura 4.9. Tale curva, a meno di una costante, coincide con il diagramma del momento flettente. Ciò significa che per tutti i tratti con momento flettente lineare, la curva delle pressioni sarà rappresentata da una retta. Per i tratti soggetti a momento flettente parabolico (ovvero soggetti a carico distribuito costante), si avrà una curva delle pressioni parabolica.

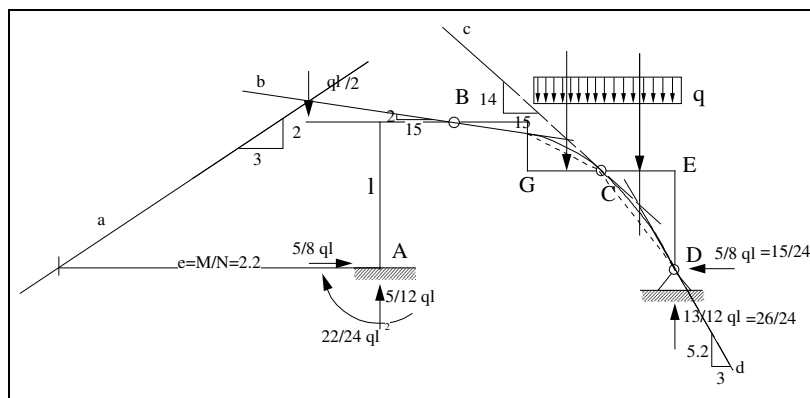


Figura 4.9

Per il tracciamento della curva si cominci, per esempio, dalla cerniera D . La cerniera, non reagendo a momento, ha la caratteristica di imporre il passaggio della curva

delle pressioni per la cerniera stessa, retta d , la cui inclinazione pari a $5.2/3$, è data dal rapporto tra le componenti delle reazioni vincolari della cerniera.

Per il tratto orizzontale CE è conveniente sostituire al carico distribuito la risultante, in modo da lavorare con carichi concentrati. In tal caso la curva delle pressioni è costituita dalla retta d da E fino alla mezzeria del tratto, e dalla retta c da tale punto fino alla cerniera C . La retta c passa per C (cerniera interna, momento nullo, curva delle pressioni che interseca l'asse della trave) e per l'intersezione tra la retta d e la retta d'azione della risultante del carico, ed è inclinata di $14/15$, pari ai valori delle reazioni H_C e V_C . Queste due rette costituiscono le tangenti della curva delle pressioni per il tratto CE , in quanto l'applicazione del carico distribuito genera una graduale transizione fra le due risultanti agli estremi. Per la costruzione della parabola si procede come segue: si traccia la fondamentale, costituita dal segmento che unisce le intersezioni delle normali all'asse della trave in corrispondenza degli estremi C e E rispettivamente con le rette c e d (segmento CD). In corrispondenza della mezzeria, retta d'azione della risultante del carico, si considera il punto medio del segmento verticale compreso tra l'intersezione tra le rette c e d (curva delle pressioni dovuta al carico concentrato) con la fondamentale (linea tratteggiata in figura), e si riporta per tale punto la parallela alla fondamentale. Tale retta costituisce la tangente alla parabola nel punto di mezzeria. Note a questo punto le due tangenti di estremità e quella del punto medio, la parabola è facilmente tracciabile.

Per il tratto BC valgono considerazioni analoghe al tratto BE , con l'unica variante che la parabola si ha solo nel tratto GC , e poi prosegue linearmente fino a B , retta b . La retta b è anche curva delle pressioni per il tratto BL , mentre per lo sbalzo, la curva delle pressioni è costituita dalla retta a , retta d'azione della forza esterna $ql/2$.

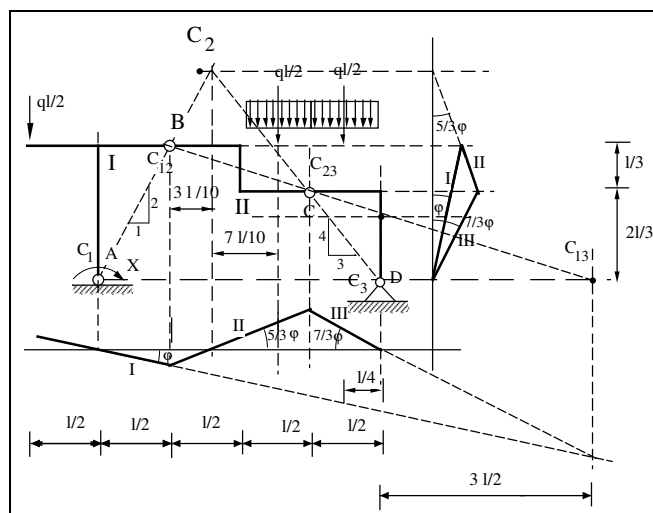
Infine la curva delle pressioni per il piedritto di sinistra è costituita dalla retta a che risulta inclinata di $2/3$, con una eccentricità rispetto all'incastro pari a $e = \frac{M}{N} = 2.2$ l e passa per l'intersezione tra la retta b e la forza esterna $ql/2$.

Si osservi come la curva delle pressioni per questa struttura descriva un arco, trattandosi in definitiva, come si era constatato dall'analisi cinematica, di un arco a tre cerniere.

4.1.5 Verifica del momento in A mediante il PLV

Si è osservato come il PLV costituisca un valido strumento per determinare le reazioni vincolari evitando di dover effettuare lunghi calcoli. Può essere però utilizzato anche in fase di verifica per controllare la correttezza dei calcoli eseguiti, come segue, oppure qualora si abbia una struttura particolarmente complessa ed articolata e risulti sufficiente, per esempio in fase di predimensionamento, determinare un'unica reazione o una caratteristica della sollecitazione.

Nel caso in esame, per determinare il momento dell'incastro in A , si renda labile la struttura introducendo in A lo svincolamento duale del momento da ricercare. La struttura questa volta è costituita da un punto di vista cinematico, a differenza del caso precedente, da tre tratti. Da una prima analisi cinematica della struttura, si osserva che essendo presenti 4 vincoli doppi, sono noti a priori 4 centri di rotazione, 2 assoluti e 2 relativi. A è centro assoluto di rotazione del tratto I, C_{11} ; C_{12} coincide con B , C_{23} con C e C_3 con D . Restano da determinare il centro assoluto di rotazione del tratto 2 ed il centro relativo di rotazione C_{13} . Sfruttando i due teoremi delle catene cinematiche, C_2 si determina sfruttando le due condizioni:



$$\left\{ \begin{array}{l} C_1, C_{12}, C_2 \\ C_2, C_{23}, C_3 \end{array} \right\} \text{allineati} \quad (4.6)$$

mentre C_{13} si determina dalle restanti due condizioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{12}, C_{13}, C_{23} \\ C_1, C_{13}, C_3 \end{array} \right\} \text{allineati} \quad (4.7)$$

In figura 4.10 sono riportati i centri assoluti e relativi di rotazione e gli spostamenti orizzontali e verticali, avendo ipotizzato una rotazione arbitraria oraria del tratto I pari a φ . Il momento M_A si determina dall'equazione di equilibrio che impone l'annullamento del lavoro esterno di tutte le forze attive e reattive (queste ultime per la dualità statico-cinematica compiono lavoro nullo):

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{VE} = 0 \Rightarrow \quad & X \times \varphi - \frac{ql}{2} \times \frac{1}{2}l \times \varphi - \frac{ql}{2} \times \frac{5}{3}\varphi \times \frac{3}{20}l - \frac{ql}{2} \times \frac{7}{3}\varphi \times \frac{1}{4}l = 0 \\ & X = \frac{1}{4}ql^2 + \frac{15}{40}ql^2 + \frac{7}{6}ql^2 = \frac{30+45+35}{120}ql^2 = \frac{110}{120}ql^2 = \frac{22}{24}ql^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

4.2 Esercizio n. 4.2 (Struttura a maglia chiusa)

Per la struttura in figura 4.11, determinare:

- le reazioni vincolari;
- i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione M , N e T ;
- il massimo momento e la sezione corrispondente, posto $l = 3$ m e $q = 2$ kN;
- la curva delle pressioni.

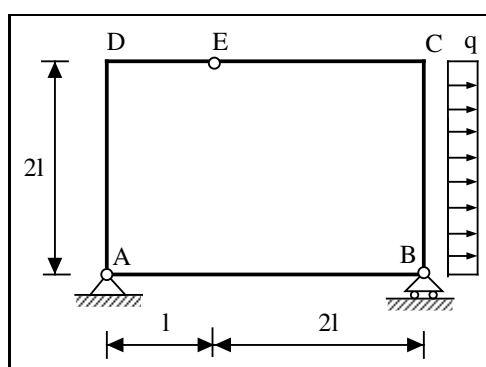


Figura 4.11

4.2.1 Calcolo delle reazioni vincolari

La struttura di figura 4.11 è vincolata esternamente in A mediante una cerniera ed in B mediante un carrello a scorrimento orizzontale. Per verificare se la struttura risulti isostatica è sufficiente constatare come una struttura a maglia chiusa sia di per se stessa tre volte iperstatica, dal momento che è necessario operare un taglio (eliminazione di un incastro interno, vincolo triplo) per ottenere una struttura isostatica. In genere, affinché una struttura biconnessa, ovvero tale da generare un'unica maglia chiusa, risulti isostatica, devono essere presenti tre sconnessioni semplici. Le travature reticolari costituiscono un tipico esempio di strutture a maglie chiuse. In tali strutture si prevedono delle cerniere interne in corrispondenza dei vertici delle maglie triangolari. Nel caso in esame, l'isostaticità per vincoli interni è garantita dalla presenza di tre cerniere interne (tre vincoli doppi ovvero tre sconnessioni semplici) in A , B ed E , e dal fatto che tali cerniere non siano allineate. La maglia chiusa costituisce quindi un corpo rigido vincolato esternamente in modo tale che non possa esistere un centro di assoluta rotazione. Nella fattispecie, tale punto dovrebbe contemporaneamente coincidere con A , per la presenza della cerniera, ed essere un punto della normale al piano di scorrimento del carrello passante per B . Dal momento che A non è un punto di tale normale, il centro di rotazione assoluta della struttura non esiste. Per il I teorema delle Catene Cinematiche, pertanto non esistono labilità, $l = 0$. Si ha dunque globalmente, considerando la struttura come un unico corpo rigido: $v - g = 3 - 3 = 0$ ed inoltre

$l = 0$. La struttura è pertanto isostatica. Il computo totale dei vincoli, d'altra parte, considerando i tre tratti costituenti la struttura AE , EB ed AB è la seguente:

$$v - g = 3 \times 3 - 3 \times 2 + 2 + 1 = 9 - 9 = 0$$

avendo considerato i tre vincoli doppi interni, la cerniera esterna in A ed il carrello in B .

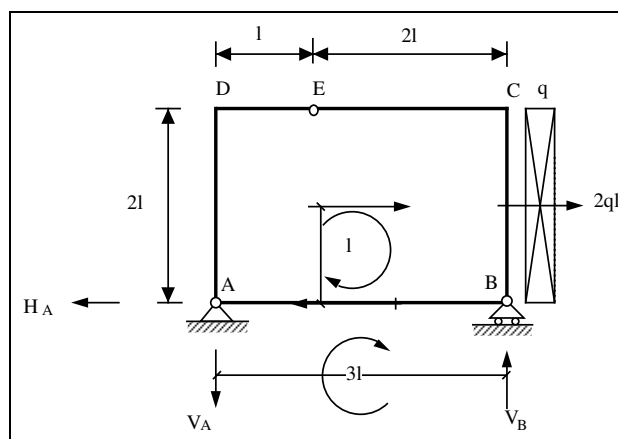


Figura 4.12

Metodo analitico

Occorre determinare le reazioni dei vincoli esterni in A e B in conseguenza della applicazione sull'asta BC del carico distribuito d'intensità q . La struttura viene considerata in questa fase come un corpo rigido, non considerando cioè i vincoli interni. Dal momento che le incognite sono solo tre, le due componenti della reazione della cerniera in A e la reazione verticale del carrello in B , sono sufficienti le tre equazioni cardinali della statica per determinare le tre incognite. Per semplicità si consideri la risultante $Q = 2ql$ del sopradetto carico distribuito, applicata nella mezzzeria del tratto BC . Per la scrittura delle tre equazioni di equilibrio si ipotizzano arbitrariamente i versi delle reazioni incogniti (figura 4.12).

Le tre equazioni cardinali della statica vengono scritte ipotizzando come positivi i versi indicati dalle frecce per le traslazioni verticali ed orizzontali (verso positivo per le forze dirette verso destra e verso l'alto) mentre per l'equilibrio alla rotazione intorno ad A si considerano positivi i momenti antiorari. Ovviamente si potrebbero considerare convenzioni opposte senza alterare il risultato finale.

$$\begin{cases} \rightarrow) & 2ql - H_A = 0 \\ A) & -2ql \times l + V_B \times 3l = 0 \\ \uparrow) & V_B - V_A = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Da cui:

$$\begin{cases} H_A = 2ql = 12kN \\ V_B = \frac{2}{3}ql = 4kN \\ V_A = V_B = \frac{2}{3}ql = 4kN \end{cases} \quad (4.10)$$

I segni positivi ottenuti nella risoluzione del sistema (4.10) confermano il verso ipotizzato a priori.

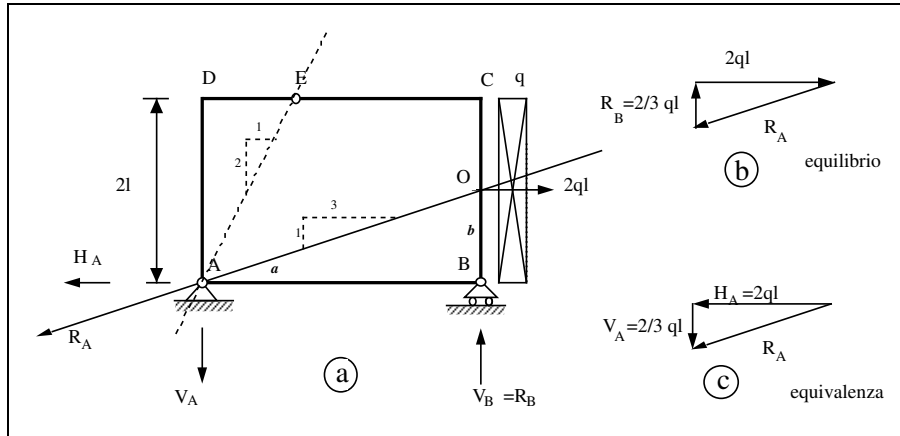


Figura 4.13

A verifica di quanto si è ottenuto analiticamente è possibile operare alcune considerazioni. L'unica reazione esterna che si può infatti opporre al carico attivo orizzontale $2ql$ è la componente orizzontale in A ($H_A = 2ql$). E' evidente che a questo punto la formazione di una coppia oraria di momento $2ql^2$ dovrà essere equilibrata da un'altra coppia uguale ed opposta creata dalle reazioni esterne verticali V_A e V_B (figura 4.12) e dovrà perciò essere:

$$V_A \times 3l = 2ql^2 \Rightarrow V_A = \frac{2}{3}ql = V_B \quad (4.11)$$

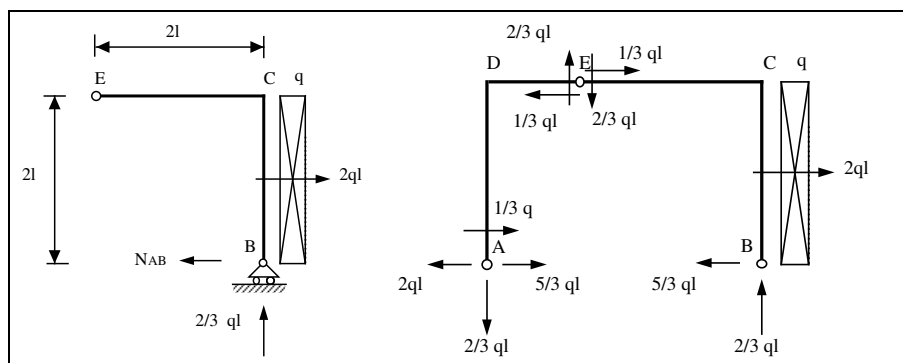


Figura 4.14

Metodo grafico

La soluzione grafica mostra un modo equivalente e spesso più intuitivo per determinare le reazioni vincolari. Per risolvere il problema è necessario questa volta ragionare in termini di forze reattive e non di componenti elementari delle singole reazioni. Le forze che agiscono sulla struttura sono tre e precisamente: la risultante del carico esterno distribuito $2ql$, la reazione della cerniera in A e la reazione del carrello in B . Della reazione del carrello si conosce la retta di azione, passante per B ed ortogonale al piano di scorrimento del carrello, mentre della reazione della cerniera si sa solo che la retta di azione deve passare per A . Dalla teoria è noto che affinché tre forze siano in equilibrio, le rette d'azione devono avere un punto in comune (equilibrio al momento intorno ad un polo generico) e devono chiudere il triangolo di equilibrio (equilibrio alla traslazione). Si deve, come prima operazione, considerare il polo O , punto di intersezione tra la retta d'azione del risultante $2ql$ delle forze attive e la retta di azione della reazione del carrello ($R_B = V_B$). Per tale punto deve passare anche la reazione R_A . La retta di azione della cerniera pertanto passa per A e per O , con una inclinazione di 1:3 rispetto all'orizzontale (figura 4.13.a). Scomponendo la forza $2ql$ secondo le direzioni a e b così individuate si ottengono in modulo e verso le reazioni cercate R_A e R_B (triangolo delle forze = problema di equilibrio) (figura 4.13.b). A sua volta R_A risulta composta da due componenti H_A e V_A il cui valore è attribuibile tramite un triangolo delle forze di equivalenza (regola del parallelogramma) (figura 4.13.c).

Reazioni interne

Per determinare lo sforzo nella biella AB si consideri il tratto EB . Imponendo l'equilibrio alla rotazione intorno alla cerniera E si ottiene (figura 4.14):

$$E) \quad 2ql \times l + \frac{2}{3}ql \times 2l - N_{AB} \times 2l = 0 \Rightarrow N_{AB} = \frac{5}{3}ql = 10\text{kN} \quad (4.12)$$

Si osservi che N_{AB} così determinato è lo sforzo che la biella AB trasmette al tratto BE . Il tratto BE trasmette alla biella AB una forza uguale ed opposta, per cui la biella risulta essere un tirante. Dall'equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale

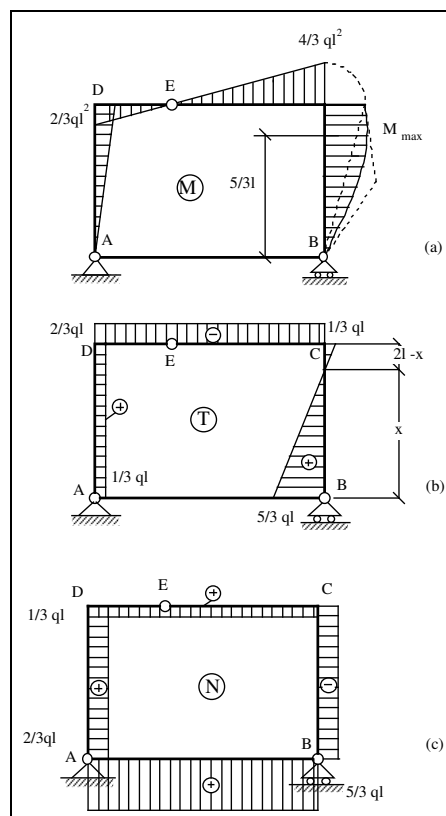


Figura 4.15

del tratto EB e AE si determinano infine le componenti della reazione della cerniera interna E .

È interessante notare come, mentre la reazione della cerniera esterna in A ha come retta di azione a , passante per A ed O ed inclinata di $1:3$, lo sforzo che la biella AB trasmette al tratto AE provoca la rotazione dello sforzo interno della cerniera A la cui retta di azione passa per E , con una inclinazione di $2:1$. Infatti il tratto AE , non essendovi forze applicate lungo il suo asse, è sollecitato esclusivamente in A ed in E . Le reazioni delle due cerniere devono avere la stessa retta di azione, stesso modulo e verso opposto affinché il tratto sia in equilibrio. In figura 4.14 sono riportate tutte le componenti delle forze attive e reattive che agiscono sulla struttura.

4.2.2 Tracciamento dei diagrammi della sollecitazione

In figura 4.15.a è riportato il diagramma del momento flettente che, laddove lineare, ovvero in tutti i tratti ad eccezione del tratto soggetto al carico distribuito, si ottiene

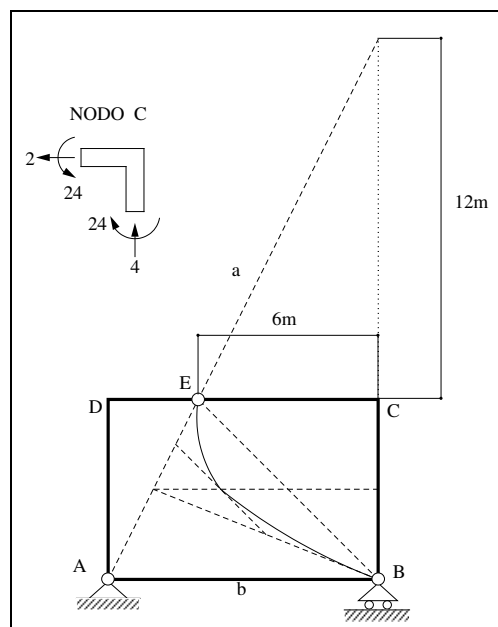


Figura 4.16

direttamente dalla conoscenza dei momenti ai nodi: nullo in A , in quanto cerniera; pari a $2/3ql^2$ in D (avendo paragonato il tratto DE ad una mensola incastrata in D e soggetta ad una forza verticale diretta verso l'alto in E pari a $1/3ql \times l$); nullo in E per poi proseguire linearmente senza cambio di pendenza fino a C , non essendo presente alcuna discontinuità di taglio lungo il tratto orizzontale ($M_C = 4/3ql^2$). Per il tratto CB , invece, il diagramma del momento flettente non è più lineare, ma è pari a quello di una mensola incastrata in C e soggetta ad un carico uniformemente distribuito più un carico concentrato all'estremo libero (principio di sovrapposizione degli effetti). Il diagramma di taglio si ricava considerando i singoli tratti come doppiamente appoggiati (figura 4.15.b). Per il diagramma di sforzo normale basta considerare le componenti assiali agenti sui singoli tratti (figura 4.15c).

4.2.3 Ricerca del massimo momento flettente e della sezione corrispondente

Si osservi a questo punto come il diagramma del taglio (figura 4.15b) rappresenti l'andamento delle derivate del diagramma del momento flettente (figura 4.15a). Questa nozione risulta essere particolarmente interessante qualora si voglia individuare il valore del momento massimo e la sezione corrispondente. Infatti laddove il taglio si annulla, il momento assume valore assoluto massimo (essendo il taglio la derivata prima del momento). Si tratta dunque di individuare per la campata CB , dove il momento presenta andamento parabolico e quindi momento massimo per ora incognito, la distanza x da B in cui il taglio si annulla. Per far ciò appare evidente dal grafico (figura 4.15b)

impostare una proporzione di similitudine fra triangoli:

$$\frac{\frac{5}{3}ql}{x} = \frac{\frac{1}{3}ql}{(2l-x)} \quad (4.13)$$

$$x = \frac{5}{3}l = 5 \text{ m}$$

Occorre ora esprimere analiticamente la funzione della curva di momento in questione per poter rapidamente associare alla posizione x trovata il valore corrispondente:

$$M_x = \frac{5}{3}ql \times x - \frac{qx^2}{2}$$

$$M_{max} = M\left(z = \frac{5}{3}l\right) = M(5) = \frac{5 \times 2 \times 3 \times 5}{3} - 2 \times \frac{25}{2} = 25 \text{ kNm}$$

Essendo quindi il momento cercato pari a 25 kNm, si nota come esso sia il momento massimo non solo del tratto CB , ma dell'intera struttura.

4.2.4 Tracciamento della curva delle pressioni

La curva delle pressioni rappresenta l'insieme delle rette d'azione delle successive forze risultanti che agiscono su una struttura, o meglio, che agiscono come reazioni vincolari interne, procedendo da un capo all'altro della struttura stessa. Nel caso in esame la curva delle pressioni (figura 4.16) per il tratto AD , DE , EC coincide con la retta B , mentre per il tratto CB , su cui agisce il carico distribuito, è costituita dall'arco di parabola mostrato in figura (4.16). La curva delle pressioni coincide, a meno di un fattore di scala, con il diagramma del momento flettente.

4.3 Esercizio n.4.3 (Arco a tre cerniere)

Per la struttura in figura 4.17, posto $l=2\text{m}$ e $F=30 \text{ kN}$, determinare:

- le reazioni vincolari;
- i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione M , N e T ;
- il massimo momento flettente e la sezione corrispondente;
- la deformata elastica qualitativa;
- la curva delle pressioni.

4.3.1 Calcolo delle reazioni vincolari

La struttura in figura 4.17 rappresenta un arco a tre cerniere (A , B e C) sollecitata da una forza orizzontale F diretta verso destra ed applicata all'estremità della mensola EH . La struttura è ovviamente isostatica, non essendo le tre cerniere allineate.

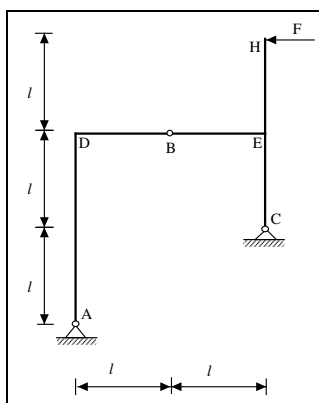


Figura 4.17

Risoluzione grafica

Le due cerniere esterne A e C reagiscono con due forze passanti per le cerniere stesse (la cerniera non reagisce a momento e quindi il braccio della retta d'azione del vincolo rispetto al vincolo stesso è nullo). Sulla struttura agiscono globalmente tre forze, una attiva F e due reattive. La condizione affinché il sistema di forze attive e reattive sia in equilibrio è che il risultante ed il momento risultante siano nulli. Quando il sistema di forze è costituito da tre vettori, la prima condizione da analizzare è quella dell'annullamento del momento risultante. Condizione necessaria affinché il momento risultante sia nullo è che le tre forze concorrano in uno stesso punto (proprio o improprio).

Per la risoluzione conviene partire dal tratto AB . La reazione della cerniera A passa per A e per B , non essendo presenti forze esterne sul tratto e dovendo pertanto le due reazioni delle cerniere essere uguali ed opposte. Determinata la retta di azione della reazione R_A , la reazione R_C passerà per C e per il punto di intersezione tra R_A e F . Note le direzioni di R_A e di R_C , si costruisce il triangolo di equilibrio delle tre forze esterne e si determinano i versi di R_A e R_C . Dal triangolo di equivalenza, infine, si determinano le componenti H_A , V_A , H_C e V_C (figura 4.18).

Risoluzione analitica

Per risolvere analiticamente il problema si utilizza un'equazione ausiliaria (essendoci a terra un vincolo sovrabbondante). Si scrivano innanzitutto le tre equazioni cardinali della statica per l'equilibrio dell'intera struttura, avendo ipotizzato H_A e H_C dirette verso destra, V_A verso l'alto e V_C verso il basso (figura 4.18):

$$\begin{cases} \uparrow) & V_A - V_C = 0 \\ A) & F \times 3l - V_C \times 2l - H_C \times l = 0 \\ \rightarrow) & H_A + H_C - F = 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

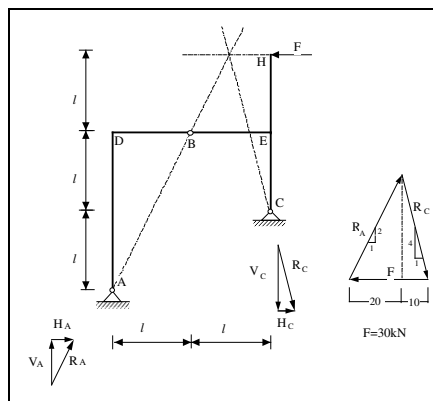


Figura 4.18

Introducendo l'equazione ausiliaria alla rotazione intorno a B per il tratto di sinistra:

$$B) \quad V_A \times l - H_A \times 2l = 0 \Rightarrow V_A = 2H_A \quad (4.15)$$

si ottiene un sistema di tre equazioni in 4 incognite. Si può a questo punto risolvere il sistema:

$$\begin{cases} V_A = V_C \\ H_C = 3F - 2V_C \\ H_A = F - H_C \\ V_A = 2H_A \end{cases} \quad (4.16)$$

da cui, risolvendo e posto $F=30$ kN, si ottiene:

$$\begin{cases} V_A = \frac{4}{3}F = 40 \text{ kN} \\ H_A = \frac{2}{3}F = 20 \text{ kN} \\ V_C = \frac{4}{3}F = 40 \text{ kN} \\ H_C = \frac{1}{3}F = 10 \text{ kN} \end{cases} \quad (4.17)$$

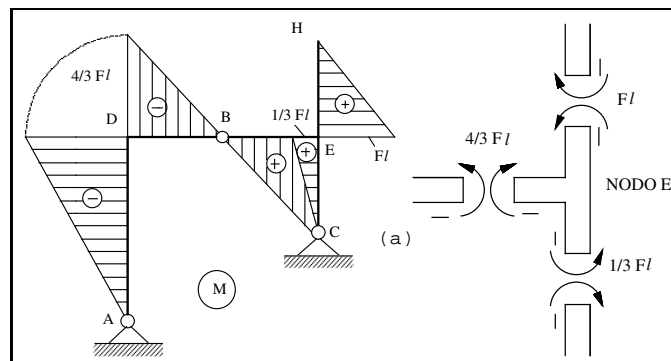


Figura 4.19

I risultati delle reazioni, tutti positivi, confermano i versi ipotizzati in partenza e concordano con i risultati ottenuti dalla risoluzione grafica.

4.3.2 Tracciamento dei diagrammi della sollecitazione

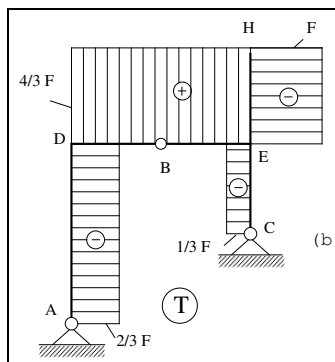


Figura 4.20

In figura 4.19 è riportato il diagramma del momento flettente che presenta per tutti i tratti un andamento lineare. Si può costruire calcolando il valore dei momenti ai nodi. Nullo in A in quanto cerniera di estremità, in D pari a $4/3 Fl$; nuovamente nullo in B in quanto cerniera interna. Per quel che riguarda il nodo E bisogna che sia verificato l'equilibrio dei momenti afferenti nel nodo.

In figura 4.20 è riportato il diagramma del taglio, caratterizzato da un andamento costante per tutti i tratti. Nel tratto AD il taglio è pari a $H_A = -2/3 F$; nel tratto DE

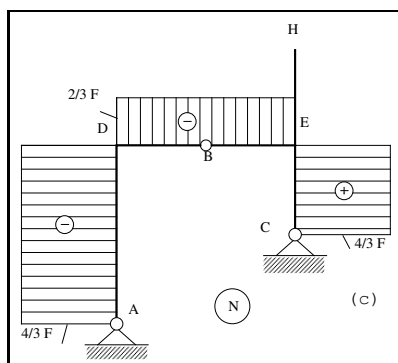


Figura 4.21

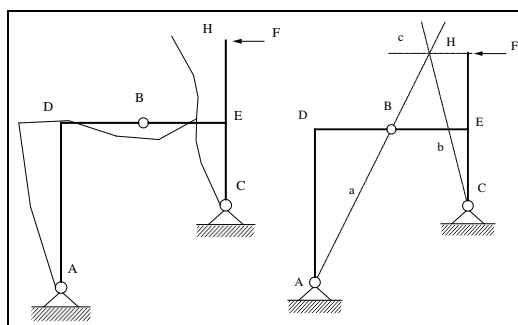


Figura 4.22

è pari a $V_A = 4/3F$, nel tratto FE è uguale a $-F$ e per finire sul tratto EC il taglio vale $H_C = -1/3F$.

Anche il diagramma di sforzo normale (figura 4.21) è rapidamente tracciabile: è sufficiente considerare le forze assiali lungo ciascun tratto. Il tratto AD presenta uno sforzo normale di compressione costante in modulo pari a $V_A = 4/3F$, il tratto DE è soggetto anch'esso a compressione pari a $H_A = 2/3F$, mentre il tratto EC è sottoposto a trazione da una forza pari a $V_C = 4/3F$. Il tratto EF non è soggetto a sforzo normale.

4.3.3 Individuazione del massimo momento flettente

Il massimo momento flettente è facilmente individuabile essendo lineare l'andamento del momento flettente. Sarà dunque sufficiente individuare il valore massimo tra quelli prima individuati ai nodi. Il massimo momento flettente si ha contemporaneamente in D (fibre tese di sinistra per il montante ivi afferente e superiori per il traverso), ed in E , con fibre tese inferiori, di modulo pari a $4/3F$.

4.3.4 Tracciamento della deformata elastica qualitativa

In figura 4.22 è riportata la deformata elastica della struttura. Il traverso DE trasla orizzontalmente verso sinistra nella stessa direzione della forza esterna F .

4.3.5 Curva delle pressioni

In figura 4.22 è riportata la curva delle pressioni, costituita nel caso in esame dalle tre rette d'azione delle tre forze agenti sulla struttura stessa. Si riporta la tabella con le rette d'azione relative ai singoli tratti di struttura.

Tratto	Retta
AD	a
DB	a
BE	a
CE	b
EH	c

Curva delle pressioni

4.4 Esercizio n.4.4 (Struttura a maglia chiusa)

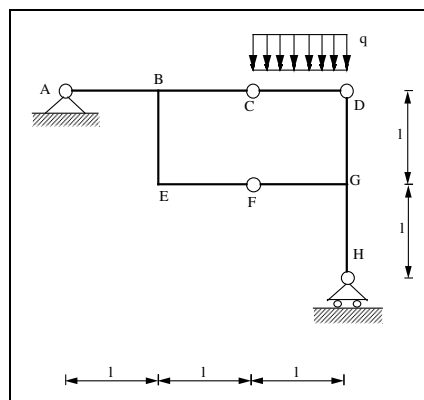


Figura 4.23

Per la struttura in figura 4.23, posto $l=2\text{m}$ e $q=20\text{kN/m}$, determinare:

- le reazioni vincolari;
- i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione M , N e T ;
- la deformata elastica qualitativa.

4.4.1 Calcolo delle reazioni vincolari

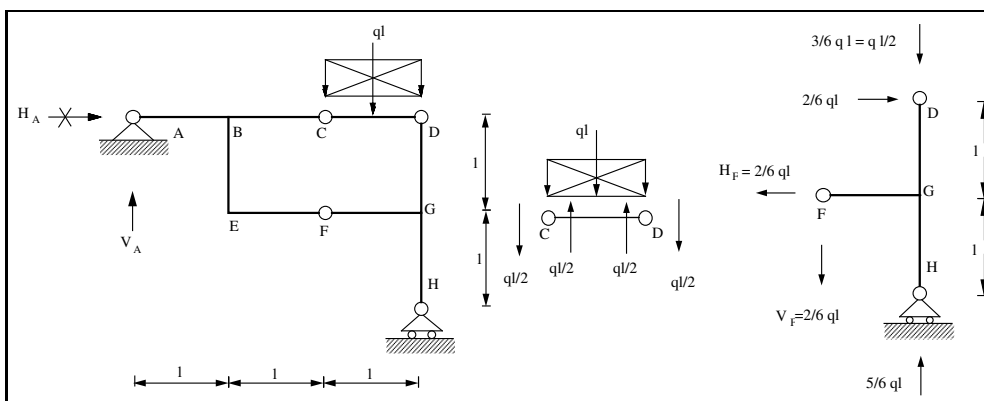


Figura 4.24

La struttura è analoga a quella di figura 4.11, trattandosi di struttura a maglia chiusa, vincolata esternamente mediante una cerniera in A e mediante un carrello a scorrimento orizzontale in H . A differenza del caso precedente, il tratto BC si prolunga orizzontalmente di l verso sinistra ed il tratto DG verso il basso. Il nodo B , come si vedrà più avanti, costituisce un nodo triplo, ovvero un nodo cui afferiscono tre travi, e bisognerà prestare attenzione all'equilibrio dei momenti in tale nodo. Nel nodo G , invece, il tratto GH non sarà soggetto a momento flettente, dal momento che il vincolo esterno solleciterà tale tratto con una reazione diretta lungo l'asse della trave. La struttura isostatica è in grado di reagire al carico uniformemente distribuito applicato sull'asta CD , grazie alle reazioni che sviluppa ai vincoli A e H . La risultante della reazione in A sarà una forza verticale, considerata l'assenza di forze orizzontali agenti esternamente sul sistema (figura 4.24).

Per determinare le reazioni vincolari esterne, si ipotizzino V_A e V_H dirette verso l'alto e si scrivano le tre equazioni cardinali della statica:

$$\begin{cases} A) & V_H \times 3l - ql \times \frac{5}{2} = 0 \\ \uparrow) & V_A + V_H - ql = 0 \\ \rightarrow) & H_A = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

Si ha così:

$$\begin{cases} V_H = \frac{5}{6}ql \\ V_A = ql - \frac{5}{6}ql = \frac{1}{6}ql \\ H_A = 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

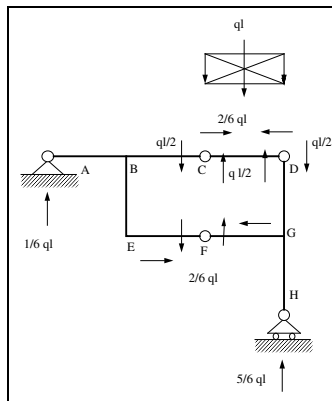


Figura 4.25

4.4.2 Tracciamento dei diagrammi della sollecitazione

Per potere tracciare i diagrammi della sollecitazione occorre capire cosa succede nei singoli tratti componenti la struttura e in particolare ai loro estremi. Partendo dall'analisi del tratto CD caricato uniformemente per tutta la sua lunghezza si nota come esso sia controbilanciato dalle reazioni verticali delle cerniere in C e D pari a $\frac{ql}{2}$ (figura 4.24).

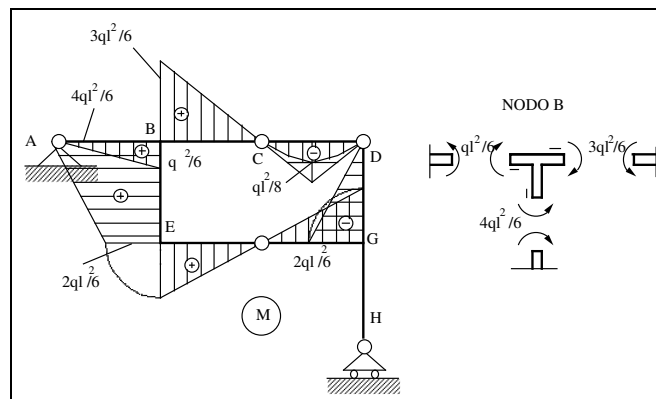


Figura 4.26

Considerando ora l'equilibrio del tratto $DFGH$ è possibile individuare il valore della forza verticale agente alla destra di F (figura 4.24).

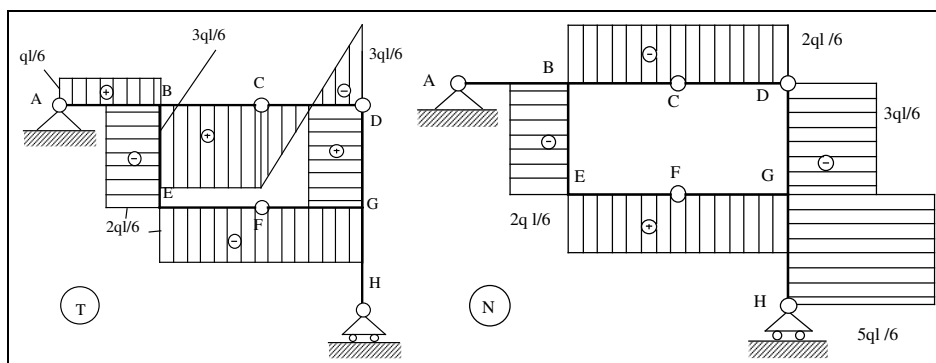


Figura 4.27

$$\uparrow) \quad \frac{5}{6}ql - \frac{3}{6}ql + V_F = 0 \Rightarrow V_F = \frac{2}{6}ql \quad (4.20)$$

Facendo poi l'equazione di equilibrio alla rotazione si trova la componente orizzontale della forza agente in F:

$$D) \quad \frac{2}{6}ql^2 - H_F \times l = 0 \Rightarrow H_F = \frac{2}{6}ql \quad (4.21)$$

Da ciò si evince che anche a destra e a sinistra di C e D agiscono delle forze uguali e contrarie pari a $2/6ql$ (figura 4.25). A questo punto non resta che tracciare i diagrammi.

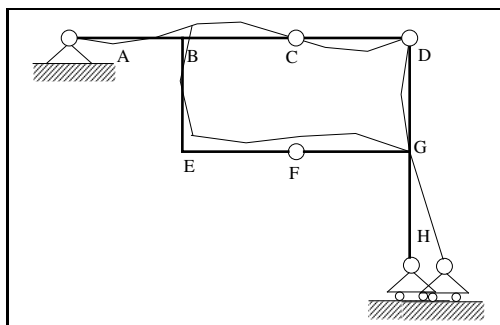


Figura 4.28

Il diagramma del momento flettente (figura 4.26) presenta un andamento lineare, fuorchè nel tratto CD dove l'andamento è parabolico. In A il momento è nullo in

quanto cerniera. A sinistra di B il momento è pari a $1/6ql^2$, dato dalla reazione V_A per il braccio l , con fibre inferiori tese. A destra di B il momento vale $3/6ql^2$, dato da V_C per l , con fibre tese superiori, essendo V_C diretta verso il basso e si annulla poi in C . Per determinare il valore del momento nell'estremità B del tratto EB , si analizzi l'equilibrio del nodo B (figura 4.26). Se ne deduce un momento pari a $4/6ql^2$ con fibre tese esterne. La parabola nel tratto CD si può costruire considerando dapprima la sola risultante. In tal caso, nella mezzeria di sinistra il diagramma prosegue con la stessa pendenza del tratto BC . Congiungendo il valore nella mezzeria con D (dove il momento si annulla) si determina la seconda tangente alla parabola. In figura 4.26 è riportata la costruzione della parabola.

Al di sotto di B il momento vale $4/6ql^2$ e procede linearmente sino ad E dove vale $2/6ql^2$. In F si annulla e procede linearmente sino a G . Il tratto GH non è soggetto a momento flettente. Il massimo momento flettente è pari a $4/6ql^2$ in B .

Il diagramma di taglio (figura 4.27) presenta un andamento costante, fuorché nel tratto CD dove è lineare. Nel tratto AB il taglio è positivo ($ql/6$), positivo in BC ($ql/2$), negativo in BE e in EG ($ql/3$). Nel tratto CD si passa da un valore positivo in C ($ql/2$) ad un valore negativo in D ($ql/2$).

Anche il diagramma di sforzo normale (figura 4.27) è di facile determinazione. Il tratto AB è scarico, mentre tutti gli altri tratti, fuorché il GE , sono sollecitati a sforzo normale di compressione, con valore massimo nel tratto GH ($5/6 ql$).

In figura 4.28 è riportata la deformata elastica qualitativa.

4.5 Esercizio n.4.5 (Struttura a maglia chiusa)

Per la struttura in figura 4.29, posto $l=3$ m e $q=20$ kN/m, determinare:

- le reazioni vincolari;
- i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione M , N e T ;
- la deformata elastica qualitativa;
- la curva delle pressioni.

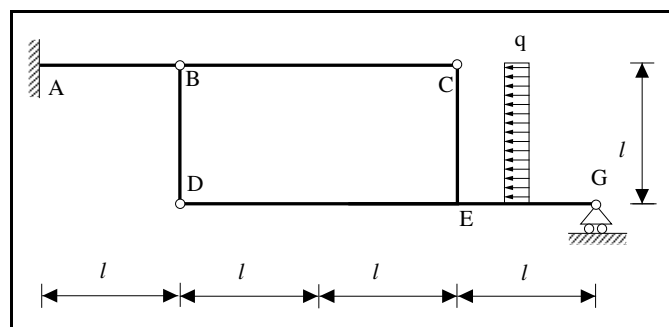


Figura 4.29

4.5.1 Calcolo delle reazioni vincolari

La struttura di figura 4.29 rappresenta ancora una struttura a maglia chiusa. A differenza della struttura dell'esercizio di figura 4.23, in questo caso la struttura nella sua globalità risulta essere costituita da due tratti, svincolati internamente tra loro mediante la cerniera interna posta in B . Per rendere la struttura isostatica, deve essere pertanto inserito un ulteriore vincolo esterno, portando il numero totale dei vincoli elementari esterni a 4. Il tratto AB , vincolato in A mediante un incastro, non può subire atti di moto rigido. La cerniera interna in B può, quindi, da un punto di vista cinematico, essere considerata come una cerniera esterna, non potendo il nodo B subire atti di moto rigido. Con questa considerazione, si ritorna ai casi analizzati precedentemente.

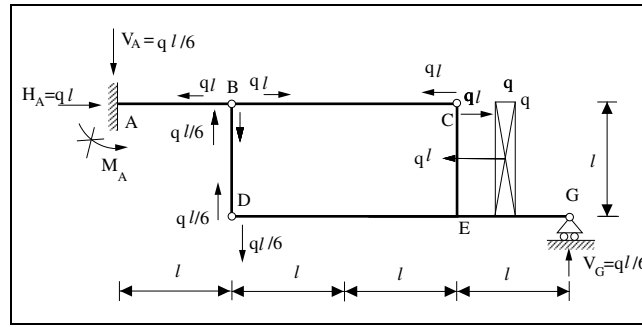


Figura 4.30

Per determinare analiticamente le reazioni vincolari, avendo questa volta 4 incognite, si deve ricorrere alla scrittura di un'equazione ausiliaria. Si ipotizzino dei versi per le reazioni vincolari come indicato in figura 4.30. Si scriva l'equilibrio alla rotazione del tratto II di destra $BDGC$ intorno a B . L'unica incognita che compare in questa equazione risulta la reazione verticale del carrello in G .

$$B) \quad -ql \times \frac{l}{2} + V_G \times 3l = 0 \quad \Rightarrow V_G = \frac{ql}{6} \quad (4.22)$$

Nota la reazione in G , è possibile determinare le altre tre reazioni incognite mediante le tre equazioni cardinali della statica, ovvero nell'ordine: equilibrio alla traslazione orizzontale, equilibrio alla traslazione verticale ed infine equilibrio alla rotazione intorno a G :

$$\begin{cases} \rightarrow) & H_A - ql = 0 \quad \Rightarrow H_A = ql \\ \uparrow) & V_G - V_A = 0 \quad V_A = V_G = \frac{ql}{6} \\ G) & M_A + \frac{ql}{6} \times 4l - ql \times l + ql \times \frac{l}{2} = 0 \quad \Rightarrow M_A = -\frac{l}{6}ql^2 \end{cases} \quad (4.23)$$

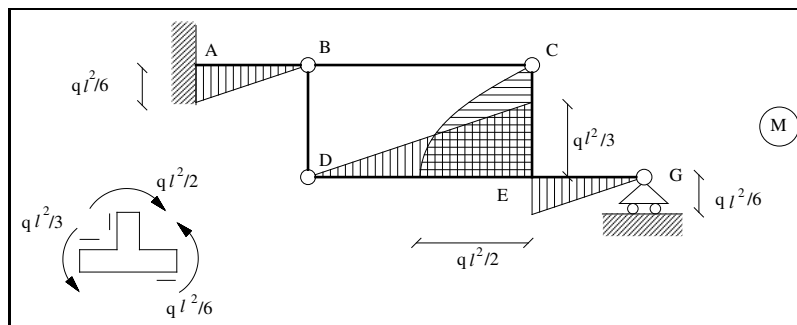


Figura 4.31

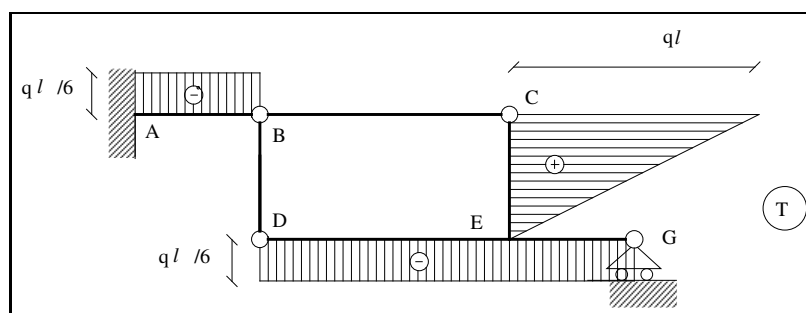


Figura 4.32

Come verifica, è possibile scrivere l'equilibrio alla rotazione intorno a B per il tratto I :

$$M_B = -\frac{ql^2}{6} + \frac{ql}{6} \times l = 0$$

Le reazioni vincolari, così determinate, sono riportate in figura 4.30.

4.5.2 Tracciamento dei diagrammi della sollecitazione

In figura 4.31 è riportato il diagramma del momento flettente. Si osservi come nel nodo E debba essere verificato l'equilibrio alla rotazione dei momenti agenti sulle tre travi che vi afferiscono. I momenti antiorari che agiscono sui due tratti orizzontali, di modulo $ql^2/3$ e $ql^2/6$ rispettivamente, vengono equilibrati dal momento orario che agisce sul montante verticale, pari a $ql^2/2$.

In figura 4.32 è riportato il diagramma del taglio, mentre in figura 4.33 si riporta infine il diagramma delle sforzo normale. Come si può osservare dai diagrammi, i tratti BC e BD sono delle bielle, soggette cioè esclusivamente a sforzo normale.

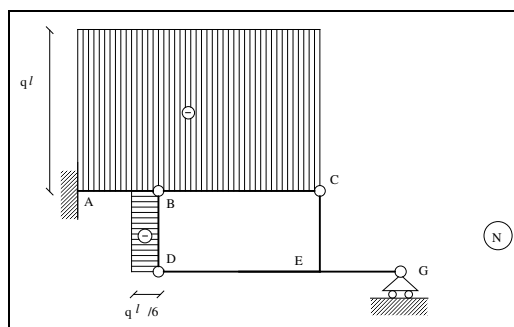


Figura 4.33

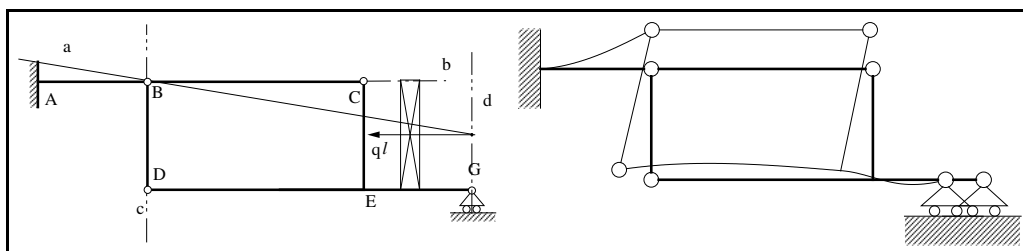


Figura 4.34

4.5.3 Tracciamento della curva delle pressioni

In figura 4.34 si riporta la curva delle pressioni per il caso in oggetto. Dal momento che il tratto verticale CG non risulta soggetto a sforzo normale, la parabola che dovrebbe rappresentare la curva delle pressioni nel tratto soggetto a carico distribuito costante, questa volta è degenera, ed è costituita da un fascio di rette parallele alla retta b . Per gli altri tratti invece, le rette d'azione della curva delle pressioni sono riportate in tabella.

In figura 4.34 è riportata infine la deformata elastica qualitativa per la struttura in esame.

Tratto	Retta
AB	a
BC	b
BD	c
CE	c
EG	d
CE	fascio // b

Curva delle pressioni

4.6 Esercizio n.4.6 (Arco a tre cerniere)

Per la struttura in figura 4.35, posto $l=2\text{m}$ e $q=10\text{ kN/m}$, determinare:

- le reazioni vincolari;
- i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione M , N e T ;
- la deformata elastica qualitativa;
- la curva delle pressioni.

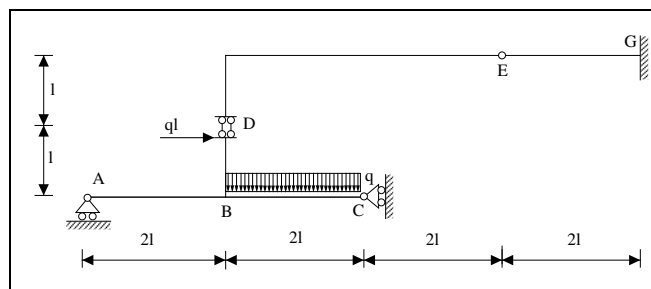


Figura 4.35

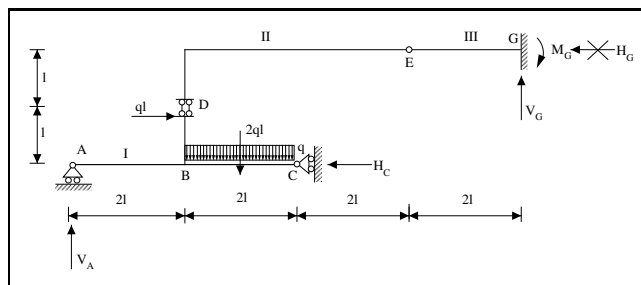


Figura 4.36

4.6.1 Calcolo delle reazioni vincolari

La struttura di figura 4.35 è costituita da tre tratti e presenta due sconnessioni semplici interne, costituite dal doppio pendolo interno con bielle verticali posto in D ed una cerniera interna posta in E . Per compensare tali sconnessioni interne, è pertanto necessaria la presenza di $3+2=5$ vincoli elementari esterni. Tali vincoli esterni sono realizzati per il tratto inferiore ACD mediante la presenza di due carrelli posti rispettivamente in A , a scorrimento orizzontale, ed in C , a scorrimento verticale. L'azione di detti carrelli costituisce una cerniera virtuale in A , laddove si intersecano le normali

ai due carrelli stessi. La struttura costituisce pertanto una sorta di arco a tre cerniere, una virtuale in A , una impropria in D e la terza in E . Non essendo tali cerniere allineate, la struttura è isostatica.

Si ipotizzino in modo arbitrario i versi delle componenti delle reazioni vincolari, come indicato in figura 4.36. Essendo 5 le incognite statiche da determinare, oltre alle tre equazioni cardinali della statica, si dovranno scrivere due equazioni ausiliarie, relative alle due sconnessioni interne presenti nella struttura.

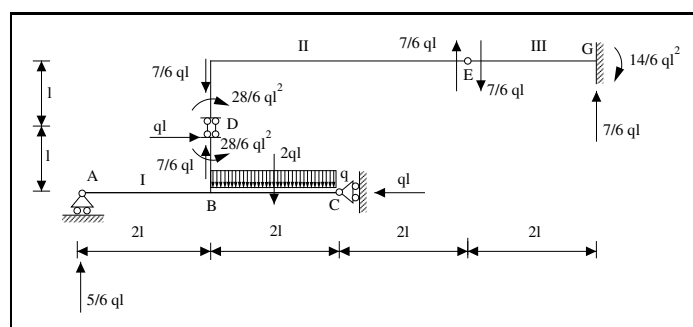


Figura 4.37

Come al solito, risulta conveniente scrivere tali equazioni in modo che compaia in ciascuna un'unica incognita. Si cominci dalla equazione ausiliaria per il tratto I, che riguarda l'equilibrio alla traslazione nella direzione orizzontale, normale all'asse dei pendolini del vincolo in D . Da questa equazione si ricava il valore della reazione del carrello in E .

Equazione ausiliaria - Tratto I:

$$\rightarrow) H_C = ql$$

Si passi successivamente alla scrittura dell'equilibrio alla rotazione intorno ad E per i due tratti I e II.

Equazione ausiliaria - Tratto I + Tratto II:

$$E) \quad ql \times l - 2ql \times 3l - ql \times 2l - V_A \times 6l = 0 \Rightarrow V_A = \frac{5}{6}ql$$

Scrivendo infine le tre equazioni cardinali della statica per l'intera struttura, si ricavano i valori delle ultime tre incognite, relative alle tre componenti del incastro in G :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow) \quad ql - H_C + H_G = 0 \quad \Rightarrow H_G = 0 \\ \uparrow) \quad V_A - 2ql + V_G = 0 \quad \Rightarrow V_G = \frac{7}{6}ql \\ G) \quad V_A \times 8l - V_C \times 2l + ql \times l + 2ql \times 5l - M_G = 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad M_G = \left(10 + 1 - 2 - \frac{40}{6} \right) ql^2 = \frac{14}{6}ql^2 \end{array} \right. \quad (4.24)$$

Le reazioni interne si determinano scrivendo gli equilibri parziali tratto per tratto:
Tratto I:

$$\left\{ \begin{array}{l} \uparrow) \quad \frac{5}{6}ql - 2ql + V_D = 0 \\ A) \quad \frac{7}{6}ql \times 2l - ql \times l - 2ql \times 3l + M_D = 0 \end{array} \right. \quad (4.25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_D = \frac{7}{6}ql \\ M_D = \frac{28}{6}ql^2 \end{array} \right. \quad (4.26)$$

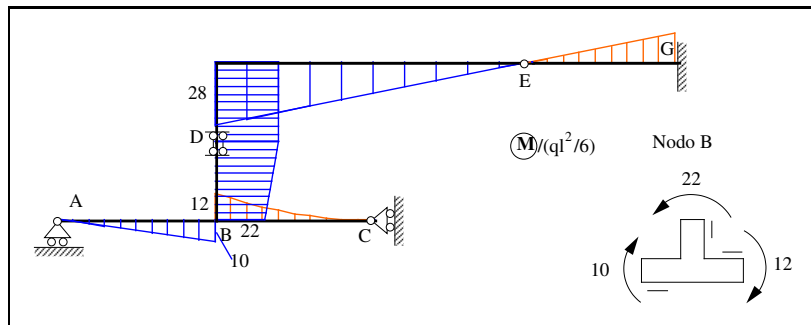
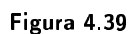


Figura 4.38

Tratto II:

$$\left\{ \begin{array}{l} \uparrow) \quad V_E = \frac{7}{6}ql \\ \rightarrow) \quad H_E = 0 \end{array} \right. \quad (4.27)$$

**Figura 4.40**

In figura 4.38 è riportato il diagramma del momento flettente, normalizzato rispetto a $\frac{ql^2}{6}$. Si noti come nel nodo B risulti verificato l'equilibrio alla rotazione per i tre momenti flettenti relativi alle tre travi ivi afferenti. Nel tratto verticale al di sopra del nodo D il momento flettente ha un andamento costante, non trasmettendo il vincolo doppio pendolo sollecitazione di taglio.

In figura 4.39 si riporta il diagramma del taglio normalizzato rispetto a $\frac{ql}{6}$, mentre in figura 4.40 è riportato il diagramma dello sforzo normale, anch'esso normalizzato per $\frac{ql}{6}$.

In figura 4.41 è tracciata la curva delle pressioni. Nel tratto BC si ha una parabola passante per C , essendo nullo il momento flettente in C ed a tangente orizzontale,

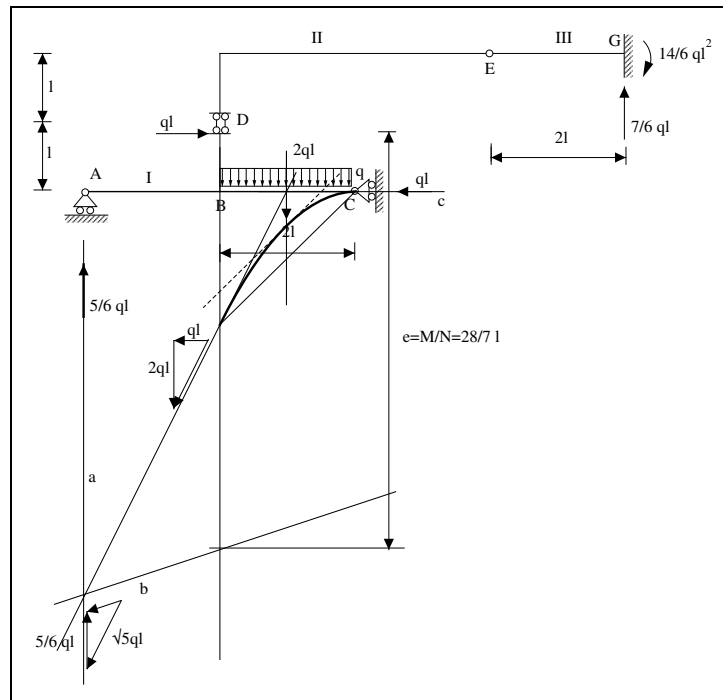


Figura 4.41

essendo nullo in C anche la sollecitazione di taglio. Le altre rette di azione della curva delle pressioni sono riportate nella tabella seguente.

Tratto	Retta
AB	a
BC	parabola
BD	b
DE	e
EG	e

Curva delle Pressioni

4.6.3 Deformata elastica.

In figura 4.42 è riportata la deformata elastica qualitativa. Si osservi come il carrello in A non subisca spostamenti orizzontali, costituendo, come accennato all'inizio, una cerniera virtuale per il tratto I, per l'azione congiunta su tale tratto dei due carrelli. In corrispondenza del doppio pendolo interno si ha una discontinuità di spostamenti orizzontali per la presenza del doppio pendolo, mentre le rotazioni relative sono nulle.

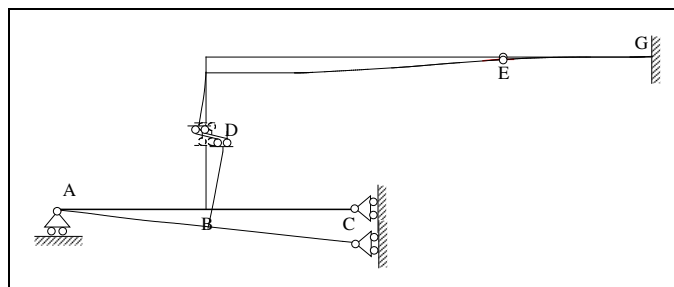


Figura 4.42

4.7 Esercizio n.4.7 (Telaio)

Per la struttura in figura 4.43, posto $l=4$ m e $q=20$ kN/m, determinare:

- le reazioni vincolari;
- i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione M, N e T;
- la deformata elastica qualitativa;
- la curva delle pressioni.

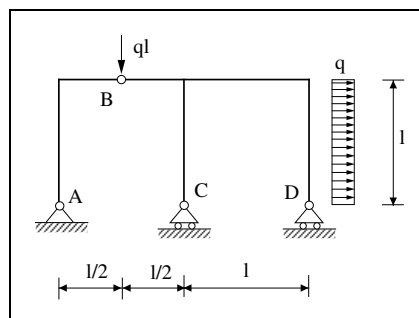


Figura 4.43

4.7.1 Calcolo delle reazioni vincolari

Il telaio in figura 4.43, con un traverso e tre pilastri ha una sconnessione semplice interna (cerniera) in B. Essendo costituita da due tratti, AB e BCD rispettivamente, deve essere vincolata esternamente mediante 4 vincoli elementari. Tali vincoli sono

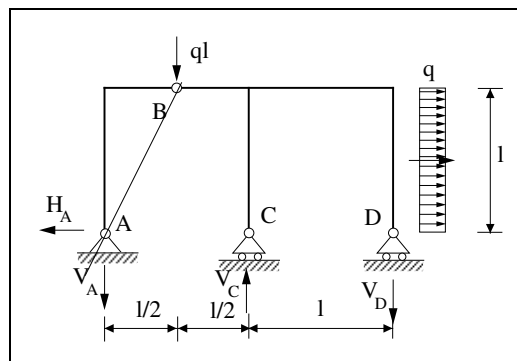


Figura 4.44

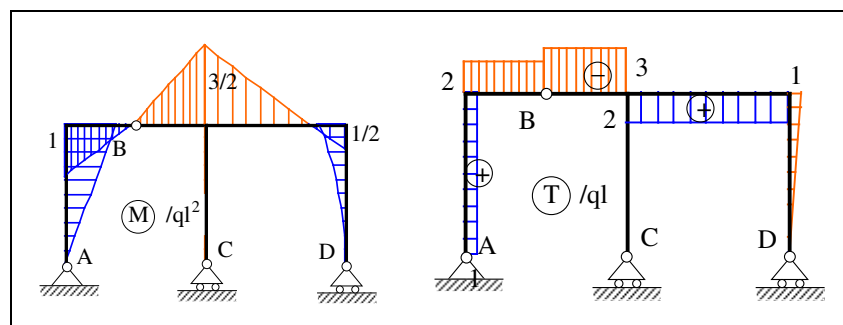


Figura 4.45

ottenuti mediante una cerniera in A e mediante due carrelli a scorrimento orizzontale in C ed in D .

Per valutare se la struttura è isostatica, dal momento che i vincoli totali v eguagliano il numero di g.d.l. ($v=6$, $g=6$), bisogna verificare che non esistano labilità, ovvero $l=0$, o in altre parole che i vincoli siano ben disposti. Per semplificare al massimo la trattazione, è sufficiente osservare come la struttura costituisca un arco a tre cerniere, due delle quali proprie (in A ed in B) ed una cerniera impropria costituita dai due carrelli in C ed in D , che globalmente costituiscono un doppio pendolo a scorrimento orizzontale. Le tre cerniere non risultano allineate, e pertanto sono esclusi atti di moto rigido.

Per determinare le reazioni vincolari, una volta ipotizzate le reazioni iniziali in modo arbitrario (figura 4.44), si scriva inizialmente l'equazione cardinale della statica per l'intera struttura relativa all'equilibrio alla traslazione orizzontale. Da tale equazione si determina il valore della componente orizzontale della cerniera in A .

$$\rightarrow) H_A = ql = 80kN \quad (4.28)$$

Risulta poi conveniente scrivere l'equazione ausiliaria per il tratto I, ovvero l'equilibrio alla rotazione del tratto di sinistra intorno alla cerniera interna B . Da questa equazione si ricava la componente verticale della reazione della cerniera in A .

Equazione ausiliaria - Tratto I

$$B) \quad -H_A \times 2 + V_A \times l = 0 \Rightarrow V_A = 2ql = 160kN \quad (4.29)$$

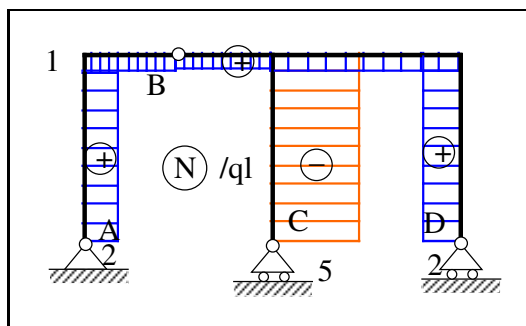


Figura 4.46

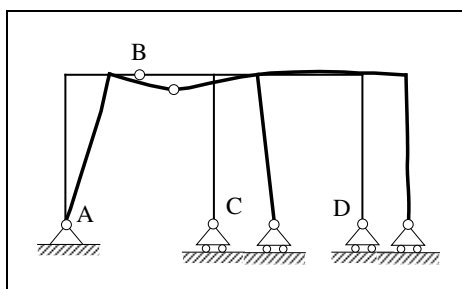


Figura 4.47

Al fine di semplificare i calcoli, e quindi scrivendo un'equazione in un'unica incognita, risulta conveniente scrivere l'equilibrio alla rotazione per l'intera struttura intorno a D , ricavando il valore della reazione in C :

$$D) \quad V_A \times 2l + V_C \times l - ql \times \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow V_C = 5ql = 400kN \quad (4.30)$$

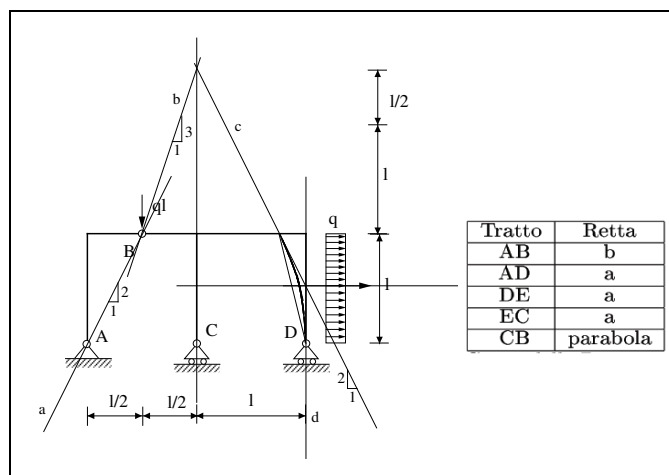


Figura 4.48

Dall'equilibrio alla traslazione verticale si ricava infine la reazione in D :

$$\uparrow) \quad -V_A + V_C - V_D = 0 \Rightarrow V_D = 2ql = 160 \text{ KN} \quad (4.31)$$

4.7.2 Diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione

In figura 4.45 è riportato il diagramma del momento flettente e del taglio, mentre in figura 4.46 quello dello sforzo normale. La deformata elastica qualitativa è invece tracciata in figura 4.47.

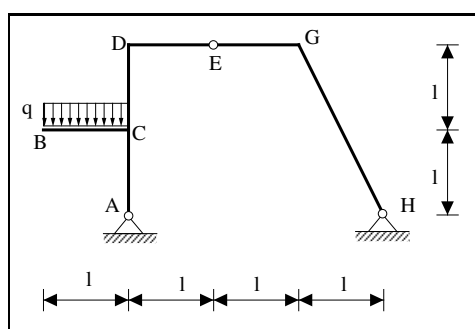
4.7.3 Tracciamento della curva delle pressioni

La curva delle pressioni è riportata in figura 4.48.

4.8 Esercizio n.4.8 (Arco a tre cerniere)

Per la struttura in figura 4.49, posto $l=3$ m e $q= 20$ kN/m, determinare:

- a) le reazioni vincolari;
- b) i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione M, N e T;
- c) la deformata elastica qualitativa;
- d) la curva delle pressioni.

**Figura 4.49**

4.8.1 Calcolo delle reazioni vincolari

La struttura di figura 4.49 rientra anch'essa nella tipologia di arco a tre cerniere, le due cerniere esterne in A e in H e nella cerniera interna in E . Essendo tali cerniere non allineate, la struttura è chiaramente isostatica. Il tratto I è caratterizzato da uno sbalzo lungo il montante AD in C di luce l soggetto ad un carico distribuito verticale di intensità q . Il tratto II, incernierato in E al tratto I, è caratterizzato da un montante inclinato.

Metodo analitico

Per la determinazione delle reazioni vincolari, essendo 4 le reazioni elementari incognite, bisogna ricorrere all'equazione ausiliaria.

Una via alternativa è rappresentata dal principio dei lavori virtuali. Infatti è possibile determinare una reazione elementare, ovvero la componente di una delle reazioni esterne, eliminando il vincolo elementare duale della reazione da ricercare, rendendo così la struttura labile, ed introducendo la reazione incognita X . La reazione incognita si determina imponendo l'annullamento del lavoro compiuto dalle forze attive e dalla reazione incognita per un qualsiasi atto di moto rigido della struttura labile compatibile con i vincoli. Ipotizzando di voler determinare la componente orizzontale della cerniera esterna in H , si degrada la cerniera in H con un carrello a scorrimento orizzontale (figura 4.50). Il centro C_2 si determina applicando il I teorema delle catene cinematiche. Per la scrittura del principio dei lavori virtuali, si è scelto di far ruotare il tratto I intorno al proprio centro di rotazione assoluta di un angolo arbitrario φ orario.

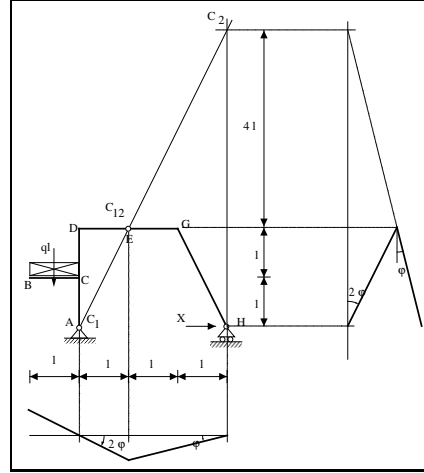


Figura 4.50

$$L_{VE} = 0 \Rightarrow -ql \times \frac{l}{2} 2\varphi + X \times 6l\varphi = 0 \Rightarrow X = \frac{ql}{6} \quad (4.32)$$

Il segno positivo indica che il verso della reazione incognita scelto arbitrariamente è corretto. Determinata una reazione elementare, si possono ottenere le altre tre utilizzando le equazioni cardinali della statica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow) \quad H_A = \frac{1}{6}ql \\ A) \quad \Rightarrow ql \times \frac{l}{2} - V_H \times 3l = 0 \Rightarrow V_H = -\frac{1}{6}ql \\ \uparrow) \quad V_A = \frac{7}{6}ql \end{array} \right. \quad (4.33)$$

Le componenti della reazione interna in E si ricavano come segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \uparrow) \quad \frac{7}{6}ql - ql + V_E = 0 \Rightarrow V_E = -\frac{1}{6}ql \\ \rightarrow) \quad H_E = \frac{1}{6}ql \end{array} \right. \quad (4.34)$$

Metodo grafico

In figura 4.51 è riportata la determinazione delle reazioni vincolari per via grafica. Per la risoluzione grafica è necessario partire dal tratto scarico EH , che indica immediatamente la direzione delle reazioni in E ed in H . Successivamente si determina la

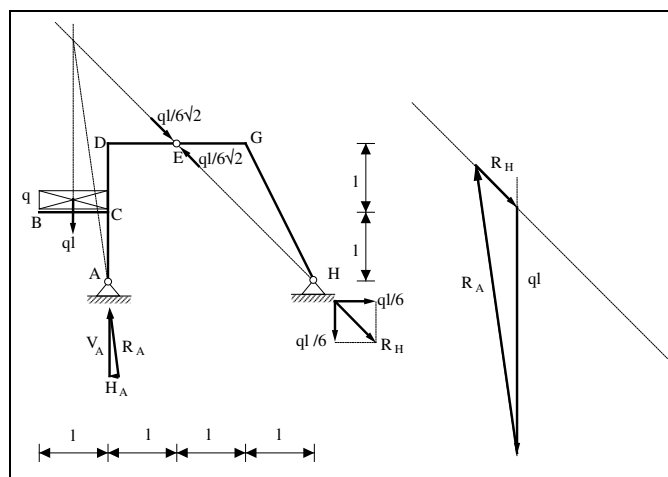


Figura 4.51

direzione della reazione in A imponendo il passaggio delle tre forze esterne (una attiva e due reattive) per lo stesso punto. Dalla costruzione dei poligoni di equilibrio si ottengono i versi di tali reazioni, ed infine dalla costruzione dei poligoni di equivalenza le componenti elementari delle stesse (figura 4.51).

4.8.2 Diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione

In figura 4.52 sono riportati nell'ordine i diagrammi del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale. In figura 4.52 è riportata la deformata elastica qualitativa. La curva delle pressioni, riportata in figura 4.51, si determina direttamente dalla risoluzione grafica delle reazioni vincolari; le rette d'azione sono indicate in tabella.

Tratto	Retta
AC	a
BC	coincidente con il carico
CD	b
DE	b
EG	b
GH	b

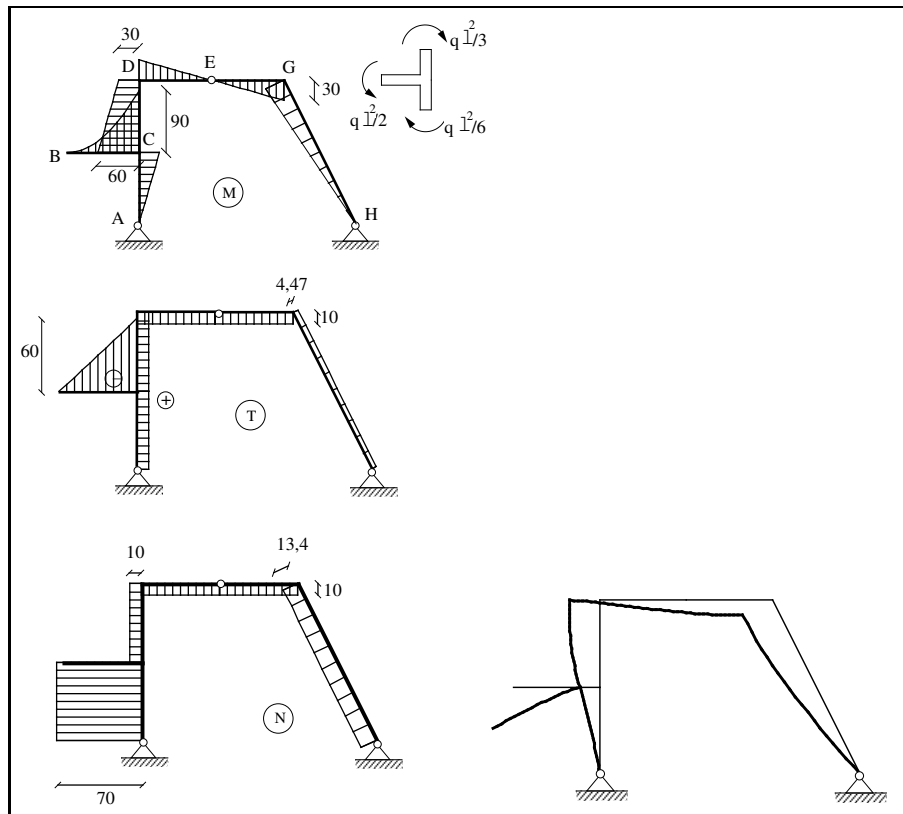


Figura 4.52

4.9 Esercizio n.4.9 (Arco a tre cerniere)

Per la struttura in figura 4.53, posto $l=4\text{m}$ e $q=30\text{ kN/m}$, determinare:

- le reazioni vincolari;
- i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione M , N e T ;
- la deformata elastica qualitativa;
- la curva delle pressioni.

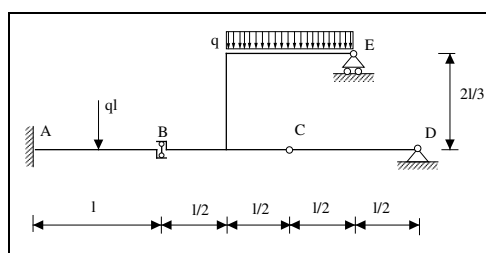


Figura 4.53

4.9.1 Calcolo delle reazioni vincolari

La struttura in figura 4.53 è un ulteriore caso di arco a tre cerniere. Infatti il tratto AB è incastrato in A e quindi non può subire atti di moto rigido. Il pendolo interno in B può allora cinematicamente considerarsi come un pendolo o carrello esterno. In questo modo il tratto BCE risulta vincolato esternamente da due carrelli a scorrimento orizzontale, equivalente ad una cerniera impropria. In C ed in D sono posizionate poi le altre due cerniere proprie. Non essendo le tre cerniere allineate, la struttura è isostatica. Dal punto di vista statico, la presenza di tre sconnessioni semplici interne (una doppia in B ed una semplice in C) necessita di $3+3=6$ vincoli elementari esterni.

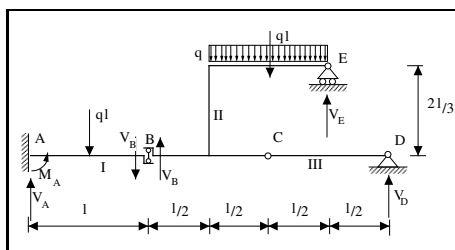


Figura 4.54

Per la determinazione delle reazioni, oltre alle tre equazioni cardinali della statica, si ricorre a tre equazioni ausiliarie

Equazione ausiliaria - Tratto III:

$$\begin{cases} C) & V_D \times l = 0 \Rightarrow V_D = 0 \\ \uparrow) & V_C + V_D = 0 \Rightarrow V_C = 0 \end{cases} \quad (4.35)$$

Il tratto III risulta pertanto scarico.

Equazione ausiliaria - Tratto II:

$$\begin{cases} B) & -ql \times l + V_E \times \frac{3}{2}l = 0 \Rightarrow V_E = \frac{2}{3}ql = 80 \text{ kN} \\ \uparrow) & V_B = \frac{1}{3}ql = 40 \text{ kN} \end{cases} \quad (4.36)$$

Tratto I:

$$\begin{cases} \uparrow) & V_A = \frac{4}{3}ql = 160 \text{ kN} \\ A) & M_A - ql \times \frac{l}{2} - \frac{1}{3}ql \times l = 0 \Rightarrow M_A = \frac{5}{6}ql^2 = 400 \text{ kNm} \end{cases} \quad (4.37)$$

4.9.2 Diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione

In figura 4.55 è riportato il diagramma del momento flettente. I diagrammi del taglio e dello sforzo normale sono riportati in figura 4.56. La deformata elastica qualitativa è tracciata in figura 4.57

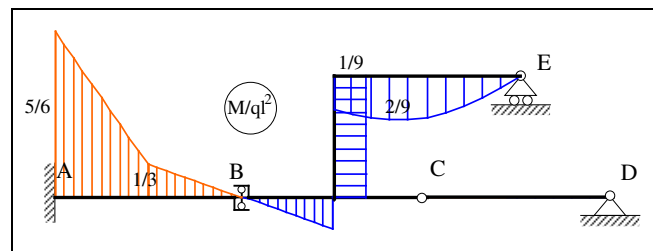


Figura 4.55

4.9.3 Curva delle pressioni

In figura 4.58 è riportata la curva delle pressioni, che in assenza di carichi assiali risulta poco significativa degenerando parzialmente in fasci di rette verticali. Nel tratto compreso tra l'incastro in A e la mezzeria del tratto di sinistra, dove è applicata la forza concentrata ql , la curva delle pressioni coincide con la retta di azione della reazione

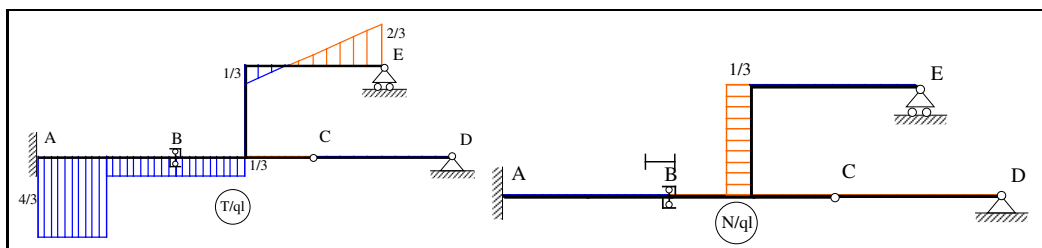


Figura 4.56

dell'incastro, posta a $\frac{M_A}{V_A} = \frac{5}{8}l$. Tale sezione si può ottenere graficamente osservando la sezione dove il momento flettente del primo tratto andrebbe ad intercettare l'asse della trave. Per la seconda metà del tratto AB , la curva delle pressioni coincide con l'asse del pendolo in B , dove passa la risultante delle forze applicate su tale tratto, e che coincide anche con quella relativa al tratto verticale di destra. Per il tratto soggetto al carico distribuito, la curva delle pressioni degenera in un fascio di rette posto a sinistra da B . In corrispondenza della sezione posta a $\frac{1}{3}$ rispetto al ginocchio la risultante si trova all'infinito, annullandosi il risultante. Successivamente la risultante comincia ad avvicinarsi da destra fino a raggiungere E , in corrispondenza della sezione E stessa. In tabella sono riportate le rette d'azione per ciascun tratto.

Tratto	Retta
AH	a
HB	b
BL	b
LG	fascio di rette a sinistra di b
GE	fascio di rette a destra di e

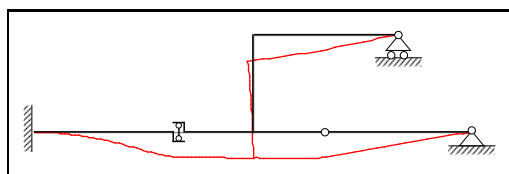


Figura 4.57

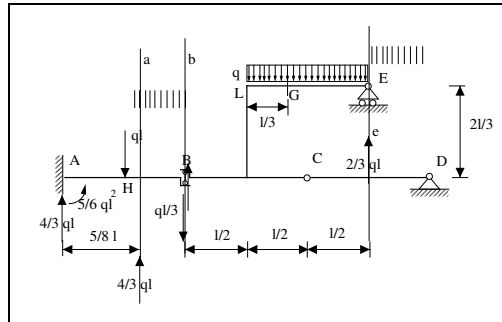


Figura 4.58

4.10 Esercizio n.4.10

Per la struttura in figura 4.59, posto $l=3$ m e $q=20$ kN/m, determinare:

- le reazioni vincolari;
- i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione M, N e T;
- la deformata elastica qualitativa.

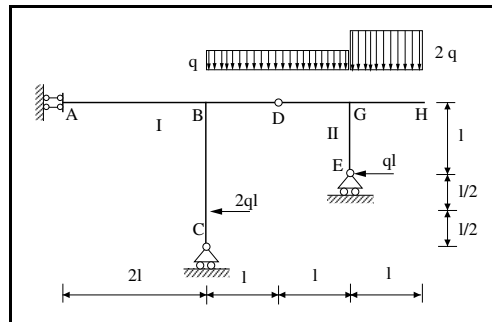


Figura 4.59

4.10.1 Reazioni vincolari

Il tratto I della struttura in figura 4.59 è vincolato esternamente in A mediante un doppio pendolo a scorrimento verticale ed in C mediante un carrello a scorrimento

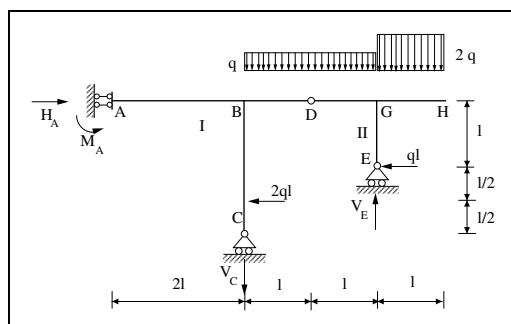


Figura 4.60

orizzontale. I tre vincoli elementari applicati su tale tratto non consentono l'esistenza di un centro assoluto di rotazione e costituiscono una sorta di incastro. Di conseguenza la cerniera interna in D si può considerare, da un punto di vista cinematico, come una cerniera esterna, e la struttura si riduce ad una semplice trave incernierata in D e con un appoggio semplice in E e pertanto risulta sicuramente isostatica, non passando la normale al piano di scorrimento del carrello per la cerniera D . I vincoli sono quindi ben disposti. La presenza dello svincolamento interno in D fa nascere l'esigenza di avere 4 vincoli elementari esterni, e pertanto per determinare le reazioni vincolari si deve utilizzare l'equazione ausiliaria relativa alla cerniera in D . Si cominci ad analizzare il tratto II:

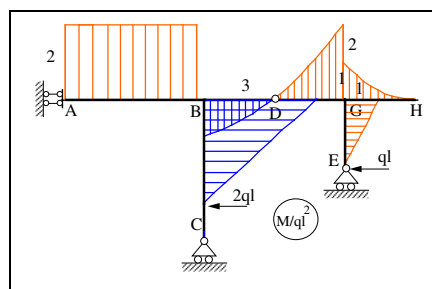


Figura 4.61

Tratto II:

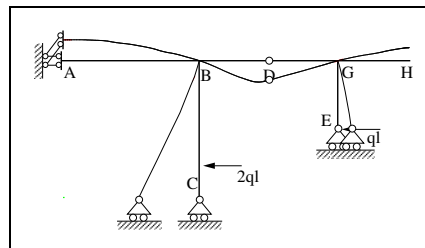


Figura 4.64

4.10.2 Diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione

In figura 4.61 è riportato il diagramma del momento flettente normalizzato per ql^2 , mentre in figura 4.62 sono indicati gli equilibri ai nodi B e C . I diagrammi del taglio e dello sforzo normale sono tracciati in figura 4.63, entrambi normalizzati per ql ed infine la deformata elastica qualitativa è disegnata in figura 4.64.

4.11 Temi proposti

Per la struttura seguenti, determinare:

- le reazioni vincolari;
- i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione M, N e T;
- le curve delle pressioni;
- le reazioni vincolari mediante il P.L.V.

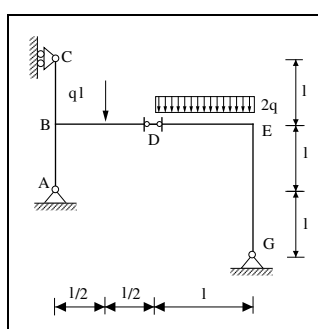


Figura 4.65

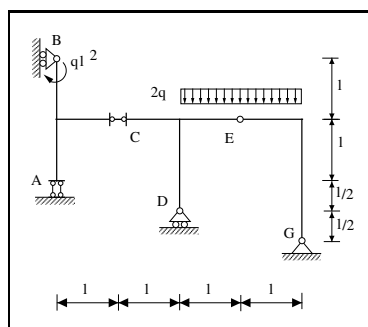


Figura 4.66

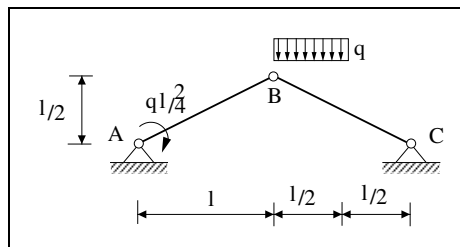


Figura 4.67

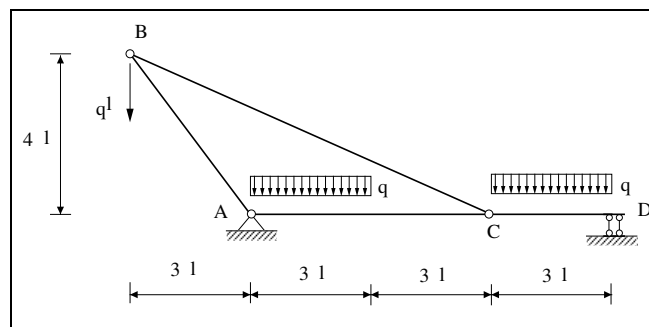


Figura 4.68

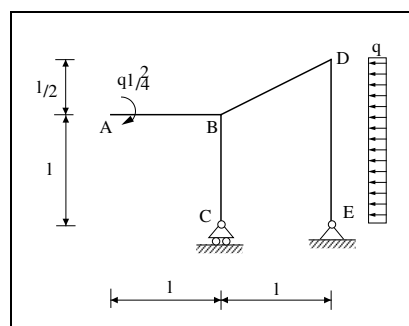


Figura 4.69

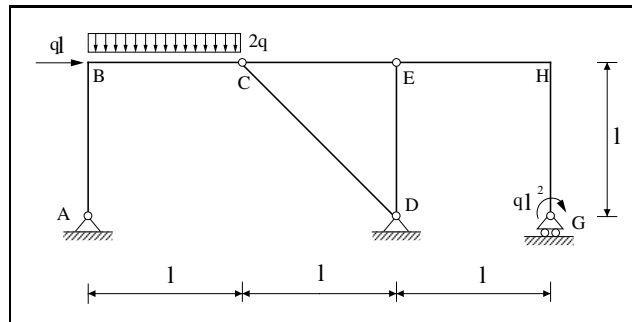


Figura 4.70

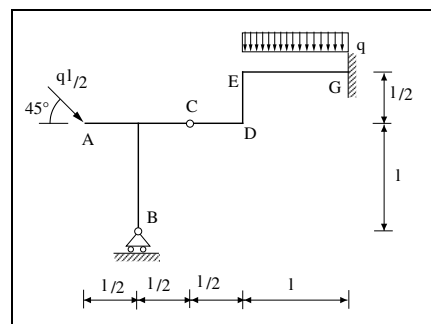


Figura 4.71

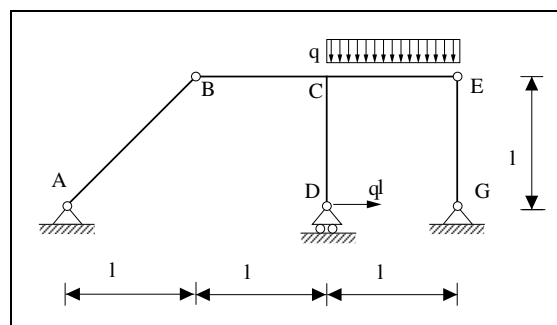


Figura 4.72

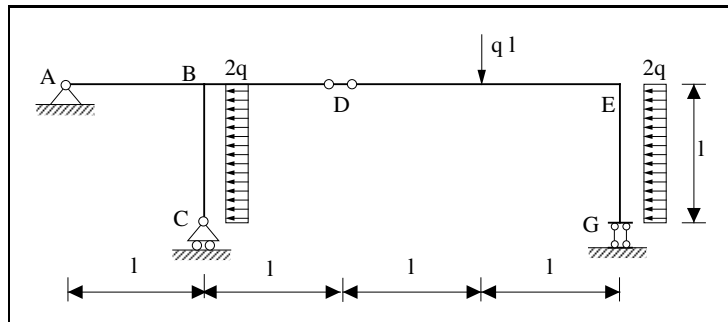


Figura 4.73

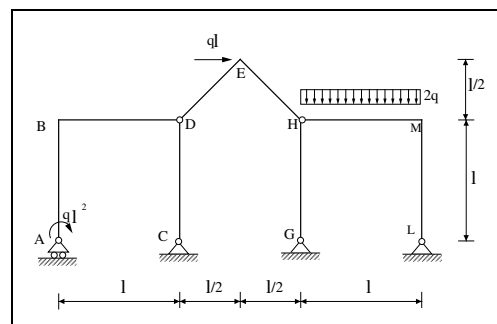


Figura 4.74

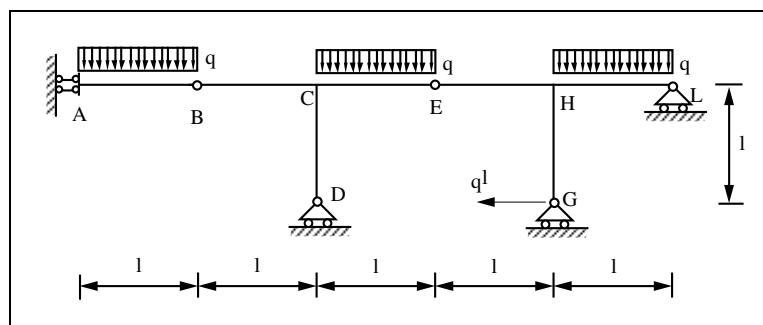


Figura 4.75

Capitolo 5

Strutture reticolari

5.1 Esercizio n.5.1

Per la struttura reticolare in figura 5.1, determinare:

- le reazioni vincolari;
- gli sforzi normali nelle singole aste;
- il massimo sforzo di compressione e di trazione e le aste corrispondenti.

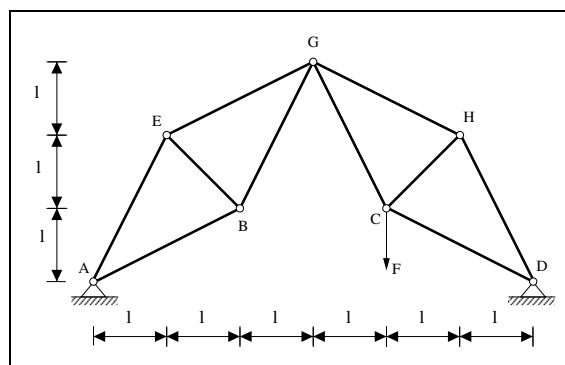


Figura 5.1

5.1.1 Calcolo delle reazioni vincolari

La struttura reticolare di figura 5.1 costituisce un arco a tre cerniere che connettono tra loro due corpi rigidi, costituito ciascuno da due maglie triangolari di vertici $ABEG$

quello di sinistra e $GCHB$ quello di destra. Le due cerniere esterne in A e D , e quella interna in G non sono allineate e quindi la struttura é a vincoli ben disposti.

Per verifica si può utilizzare la condizione necessaria circa il computo dei vincoli, laddove deve risultare: $v = a + v_c = 2n$, ovvero che il numero delle incognite statiche della struttura reticolare (sforzi normali nelle singole aste a e vincoli elementari esterni v_c) uguagli il numero di equazioni di cui si dispone (2 equilibri alla traslazione per ogni nodo n).

Il computo dei vincoli porge:

$$a(\text{numero delle aste}) = 10;$$

$$n(\text{numero dei nodi}) = 7;$$

$$v_c(\text{numero dei vincoli elementari esterni}) = 4;$$

$$a + v_c = 10 + 4 = 14 = 2n.$$

Contrassegnati i nodi e numerate le aste (figura 5.2) si può procedere alla soluzione del problema.

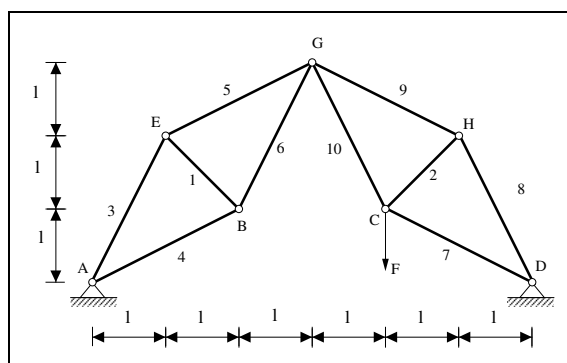


Figura 5.2

Le reazioni esterne sono determinabili con semplici condizioni di equilibrio:

$$\begin{cases} A) & V_D \times 6l - F \times 4l = 0 \\ \uparrow) & V_A + V_D - F = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Da cui:

$$\begin{cases} V_D = \frac{2}{3}F \\ V_A = \frac{1}{3}F \end{cases} \quad (5.2)$$

Poiché la struttura presenta quattro vincoli esterni elementari, per calcolare le restanti reazioni vincolari occorre utilizzare un'equazione ausiliaria. Si scriva l'equazione di equilibrio alla rotazione intorno a G per il tratto di sinistra (figura 5.3):

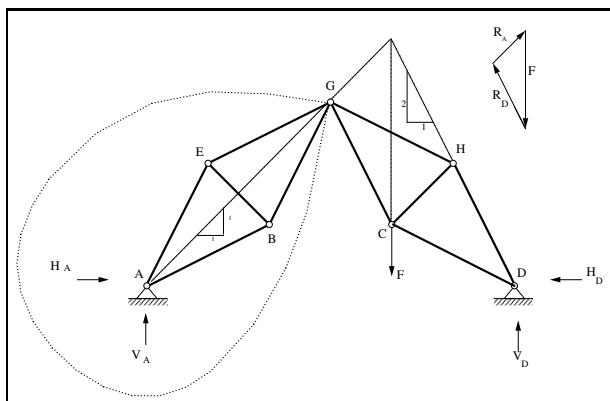


Figura 5.3

$$\begin{cases} \sum M_G & -V_A \times 3l + H_A \times 3l = 0 \\ \rightarrow & H_A + H_D = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

Da cui:

$$\begin{cases} H_A = \frac{1}{3}F \\ H_D = \frac{1}{3}F \end{cases} \quad (5.4)$$

Si noti come le reazioni esterne siano determinabili anche mediante il metodo grafico (figura 5.3). Il tratto AG non risulta caricato mediante forze esterne. La reazione di A dovrà passare per G . La reazione di D passerà poi per D e per il punto di intersezione tra la retta d'azione di R_A e la retta d'azione della forza esterna.

5.1.2 Ricerca degli sforzi normali nelle singole aste

Per determinare gli sforzi nelle singole aste si dispone di $2n$ equazioni in $(a + v_c)$ incognite. Tale modo di procedere si dice metodo dell'equilibrio dei nodi, e di esso si può dare una versione grafica assai significativa, imponendo l'equilibrio di ciascun nodo e considerandone il poligono delle forze. Prefissata così una scala di rappresentazione, si può procedere con ordine alla ricerca degli sforzi.

Si analizzino singolarmente i vari nodi:

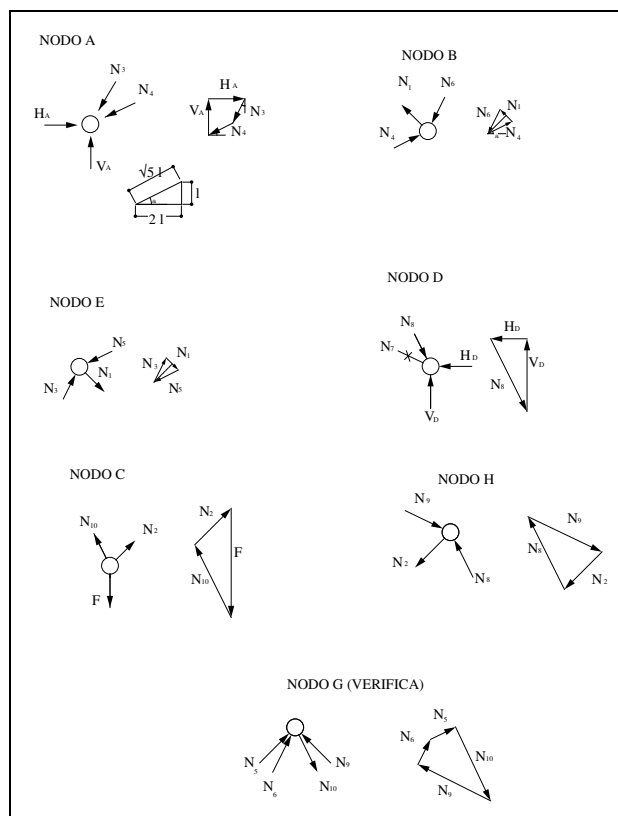


Figura 5.4

NODO A

Sul nodo A agisce la reazione della cerniera R_A , ovvero le due componenti verticale V_A ed orizzontale H_A note. Per ogni nodo si dispone delle sole equazioni di equilibrio alla traslazione, dal momento che tutte le forze in gioco passano per il nodo, e quindi l'equilibrio alla rotazione è automaticamente verificato. Le uniche incognite sono gli sforzi normali nelle aste 3 e 4, N_3 e N_4 , di cui però si conosce la direzione. Imponendo la chiusura del poligono delle forze ed imponendo che tutte le forze abbiano verso tale da rincorrersi (problema di equilibrio) si determina graficamente il verso e l'intensità di N_3 e N_4 (figura 5.4). I versi di N_3 e di N_4 risultano entranti nel nodo, ed essendo tali forze le reazioni che le aste scaricano sul nodo, le azioni che il nodo scarica sulle aste risulta entrante nell'asta stessa e quindi di compressione (puntoni). Il valore degli sforzi N_3 e N_4 può alternativemente determinarsi per via analitica, scrivendo le due equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale, e quindi operando proiettando lungo le due direzioni tutte le forze afferenti al nodo. In genere risulta molto conveniente

scegliere arbitrariamente il verso degli sforzi incogniti uscenti dal nodo (cioè si ipotizza che siano dei tiranti). Se il valore algebrico che si ottiene dal sistema è positivo, significa che il verso scelto arbitrariamente è confermato, se viceversa risulta negativo, bisogna invertire. La convenienza sta nel fatto che se il segno dello sforzo risulta positivo, si ha un tirante, caratterizzato da valori di sforzo normale positivo per convenzione, viceversa se il valore dello sforzo risulta negativo, si ha un puntone, caratterizzato da sforzo normale negativo. Si sottolinea nuovamente, per chiarezza, che ciò vale solo se si è scelto per gli sforzi incogniti versi uscenti dal nodo. Si ricorda infatti che dalle equazioni cardinali della statica il valore algebrico positivo conferma esclusivamente il verso scelto a priori per una forza incognita, mentre il segno negativo indica che la forza scelta a priori ha verso opposto a quello scelto. Si ottiene un sistema di due equazioni nelle due incognite N_3 e N_4 :

$$\begin{cases} \uparrow) \quad \frac{1}{3}F + N_3 \times \sin \alpha_3 + N_4 \times \sin \alpha_4 = 0 \\ \rightarrow) \quad \frac{1}{3}F + N_3 \times \cos \alpha_3 + N_4 \times \cos \alpha_4 = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

dove con α_4 e α_3 si sono indicati gli angoli compresi tra le aste 4 e 3 e l'orizzontale. Per la particolare geometria della travatura, essendo le inclinazioni dell'asta 4 pari a 1:2 e dell'asta 3 pari a 2:1, osservando il triangolo fondamentale riportato in figura?? e sfruttando le proprietà dei triangoli rettangoli, si ha:

$$\begin{cases} 1 = \sqrt{5} \times (\sin \alpha_3) \Rightarrow \sin \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 2 = \sqrt{5} \times (\cos \alpha_3) \Rightarrow \cos \alpha_3 = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 = \sqrt{5} \times (\cos \alpha_4) \Rightarrow \cos \alpha_4 = \frac{1}{\sqrt{5}} = \sin \alpha_3 \\ 2 = \sqrt{5} \times (\sin \alpha_4) \Rightarrow \sin \alpha_4 = \frac{2}{\sqrt{5}} = \cos \alpha_3 \end{cases} \quad (5.6)$$

Sostituendo i valori dei seni e coseni così determinati, si ottiene:

$$N_3 = -F \frac{\sqrt{5}}{9} = N_4 \quad (5.7)$$

Il segno negativo indica che gli sforzi delle due aste in questione (3 ,4) risultano entranti e quindi le aste sono puntoni, per la particolare condizione di carico.

NODO B

Una volta determinato il valore di N_4 , le uniche incognite sono N_6 e N_1 . Lo sforzo del puntone N_4 viene quindi riportato entrante nel nodo. Tale sforzo dovrà essere equilibrato con gli sforzi incogniti N_6 e N_1 . Tracciato il poligono di equilibrio, si vede come N_1 risulti uscente dal nodo (tirante), mentre N_6 risulta entrante (puntone).

Analiticamente si ha:

$$\begin{cases} \rightarrow) & N_4 \cos \alpha_4 + N_6 \cos \alpha_6 - N_1 \cos \alpha_1 = 0 \\ \uparrow) & N_4 \sin \alpha_4 + N_6 \sin \alpha_6 + N_1 \sin \alpha_1 = 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

In questo modo se con α_i si indica l'angolo compreso tra l'asta e l'orizzontale, nell'equilibrio nella direzione orizzontale lo sforzo andrà moltiplicato per il coseno, per il seno invece per l'equilibrio verticale. Nel caso in esame si nota immediatamente che $\alpha_6 = \alpha_3$ essendo le due aste inclinate di 2:1, mentre $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$, essendo l'asta inclinata di un rapporto 1:1. Sostituendo i valori dei seni e dei coseni si ottiene:

$$\begin{cases} \rightarrow) & \frac{\sqrt{5}}{9} F \times \frac{2}{\sqrt{5}} + N_6 \frac{1}{\sqrt{5}} - N_1 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \\ \uparrow) & \frac{\sqrt{5}}{9} F \times \frac{1}{\sqrt{5}} + N_6 \frac{2}{\sqrt{5}} + N_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (5.9)$$

Ricavando dalla prima delle (5.9) N_1 in funzione di N_6 :

$$N_1 = \sqrt{2} \left(N_6 \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2F}{\sqrt{9}} \right)$$

e sostituendolo nella seconda si ottiene:

$$N_6 = -\frac{F\sqrt{5}}{9}$$

$$N_1 = \frac{F\sqrt{2}}{9}$$

Il segno positivo per N_1 indica che il verso ipotizzato a priori (uscente) viene confermato e l'asta 1 risulta un tirante, mentre il segno negativo per N_6 indica che il verso dello sforzo è entrante nel nodo e che quindi l'asta 6 è un puntone.

NODO E

Passando al nodo E gli sforzi N_3 e N_1 sono noti mentre bisogna determinare lo sforzo incognito N_5 . In figura 5.4 è riportata la costruzione del poligono delle forze. E' evidente che N_3 e N_5 sono uguali non solo in modulo e risultano entranti nel nodo, ovvero sono entrambi puntoni.

NODO D

In questo nodo risultano note le componenti della reazione vincolare in D , H_D e V_D , mentre sono incogniti gli sforzi N_7 e N_8 . Dal poligono di equilibrio si nota che l'asta 7 è scarica, in quanto lo sforzo N_8 controbilancia totalmente la reazione in D .

NODO C

Dalla forza F applicata sul nodo, si ricavano gli sforzi incogniti N_2 e N_{10} .

NODO H

Dal triangolo delle forze, o analogamente dalla scrittura delle due equazioni di equi-

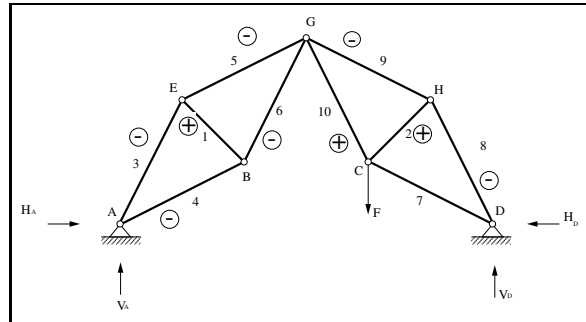


Figura 5.5

librio, da questo nodo si ricava il valore dello sforzo N_9 , avendo già determinato gli sforzi N_2 e N_8 .

NODO G

Avendo già determinato tutti gli sforzi, non dimenticando che le reazioni vincolari sono state calcolate mediante le equazioni cardinali della statica, per il nodo G si può operare una verifica. Il poligono di equilibrio si chiude perfettamente (figura ??).

5.1.3 Individuazione del massimo sforzo di compressione e di trazione

Le aste sono nella maggior parte compresse, i due montanti 1 e 2 tesi, l'asta 7 e l'asta 10, nel cui nodo di incontro C agisce il carico esterno F , sono la prima scarica e la seconda tesa. L'asta 10 è quella che sopporta il massimo sforzo di trazione, mentre le aste 8 e 9 il massimo sforzo di compressione.

Asta	N_{max}
1	$\frac{\sqrt{2}}{9} F$
2	$\frac{\sqrt{2}}{3} F$
3	$-\frac{\sqrt{5}}{9} F$
4	$-\frac{\sqrt{5}}{9} F$
5	$-\frac{\sqrt{5}}{9} F$
6	$-\frac{\sqrt{5}}{9} F$
7	0
8	$-\frac{\sqrt{5}}{3} F$
9	$-\frac{\sqrt{5}}{3} F$
10	$\frac{\sqrt{5}}{3} F$

5.2 Esercizio n.5.2

Per la struttura reticolare in figura 5.6, determinare:

- le reazioni vincolari;
- gli sforzi normali nelle singole aste;
- il massimo sforzo di compressione e di trazione e le aste corrispondenti.

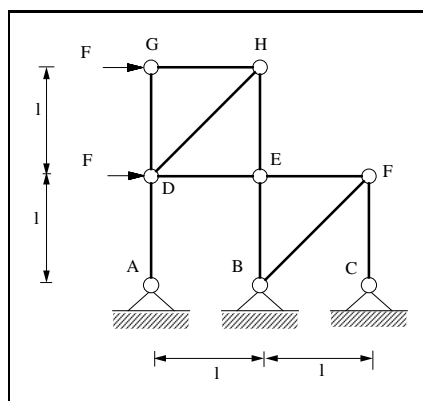


Figura 5.6

5.2.1 Analisi della struttura e calcolo delle reazioni vincolari

La struttura in figura 5.6 è costituita da due corpi rigidi. Il primo è il quadrato $DGHE$ avente due maglie chiuse triangolari, il secondo è invece la maglia triangolare EFB . I due corpi sono vincolati mutuamente mediante la cerniera interna E . Apparentemente sembrerebbe che i vincoli elementari esterni, costituiti dalle tre cerniere in A , in B e in C , siano 6, e che quindi la struttura risulti 2 volte iperstatica. Viceversa, il tratto AD costituisce un pendolo esterno, così come il tratto CF . Pertanto i vincoli elementari esterni risultano essere solo 4. Ovviamente le componenti orizzontali delle cerniere A e C , sono nulle dal momento che le aste AD e CF possono reagire solo a sforzi diretti lungo i rispettivi assi. Il computo dei vincoli porge peraltro:

$$\begin{cases} a \text{ (numero delle aste)} = 10; \\ n \text{ (numero dei nodi cerniera)} = 8; \\ v_c \text{ (numero dei vincoli elementari)} = 6. \end{cases} \quad (5.10)$$

Da ciò si ottiene che essendo $a + v_c = 2n$, quindi $10 + 6 = 16$, la condizione necessaria affinché la struttura sia isostatica è verificata.

Contrassegnati i nodi e numerate le aste (figura 5.7) si può procedere alla soluzione del problema. Le reazioni esterne orizzontali sono facilmente ricavabili se, come già

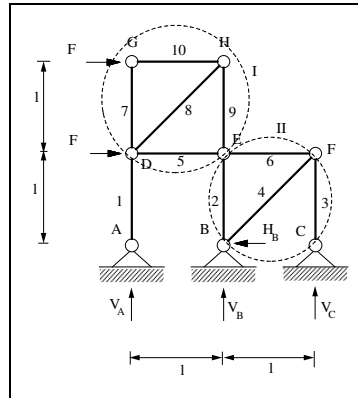


Figura 5.7

detto, si considera che in A e in C non concorrono aste che possano assorbire forze orizzontali. Si deduce quindi che B assorbe tutte le forze esterne applicate sulla struttura, pari in questo caso a $2F$. In formule si può scrivere:

$$\begin{cases} H_A = H_C = 0 \\ \rightarrow) H_B = 2F \end{cases} \quad (5.11)$$

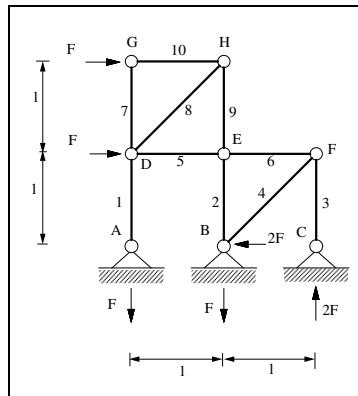


Figura 5.8

Le tre reazioni verticali incognite vanno determinate utilizzando un'equazione ausiliaria e le restanti due equazioni cardinali della statica (equilibrio alla traslazione

verticale e alla rotazione rispetto ad un polo arbitrario). Si cominci dall'equazione ausiliaria del tratto I alla rotazione rispetto alla cerniera interna E , dove solo la reazione in A e la forza orizzontale F applicata in G , hanno braccio non nullo rispetto ad E :

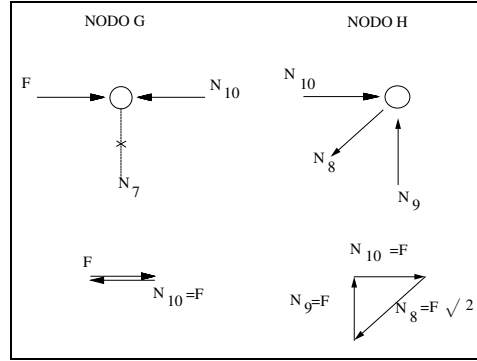


Figura 5.9

$$E) \quad -V_A \times l - F \times l = 0 \Rightarrow V_A = -F \quad (5.12)$$

Il segno meno indica che il verso ipotizzato inizialmente verso l'alto risulta sbagliato, e quindi il verso corretto della reazione in A è verso il basso.

Dall'equilibrio alla rotazione intorno a C per l'intera struttura si determina la componente verticale della reazione in B ed infine, dall'equilibrio alla traslazione verticale la componente verticale della reazione in C :

$$\begin{cases} C) & -V_A \times 2l - V_B \times l - F \times l - F \times 2l = 0 \Rightarrow V_B = -F \\ \uparrow) & V_A + V_B + V_C = 0 \Rightarrow V_C = 2F \end{cases} \quad (5.13)$$

Dalla conoscenza delle reazioni verticali, riportate in figura 5.8, possono essere determinati gli sforzi nelle aste 1 e 3, potendosi, come già accennato, considerare come pendoli; entrambi risultano tesi con uno sforzo normale pari a F .

5.2.2 Ricerca degli sforzi normali nelle singole aste

Per la ricerca degli sforzi normali nelle singole aste si adotta il metodo dell'equilibrio ai nodi, imponendo l'equilibrio per ciascun nodo e considerandone il poligono delle forze mediante il quale si determina il verso e l'intensità delle forze ivi agenti. Si possono in generale scrivere $2n$ equazioni in $(a + v_c)$ incognite, e verificare così i valori delle reazioni esterne, già ottenute imponendo l'equilibrio globale. Il triangolo fondamentale per la risoluzione grafica dell'equilibrio ai nodi ha lati $1, 1, \sqrt{2}$, essendo tutti i diagonalini inclinati di $\frac{\pi}{4}$.

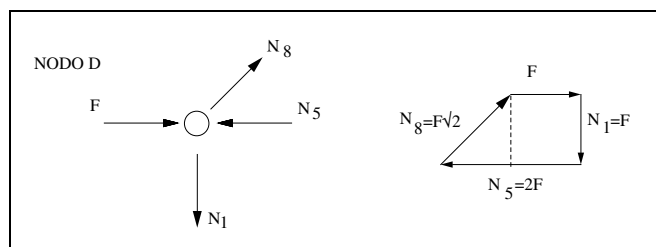


Figura 5.10

NODO G

Sul nodo G agisce la forza orizzontale esterna F e gli sforzi incogniti relativi alle aste 10 e 7. Avendo N_{10} la stessa direzione di F , risulta evidente come l'asta 7, per l'equilibrio al nodo, risulti scarica (figura 5.8). N_{10} agisce perciò in modo da contrastare da sola la forza esterna; essa è dunque un puntone.

NODO H

N_{10} è noto, mentre le incognite sono N_8 e N_9 . Lo sforzo trasmesso dal puntone N_{10} al nodo deve quindi risultare equilibrato dagli sforzi N_8 e N_9 . Tracciato il poligono di equilibrio (figura 5.8), si vede come N_8 esce dal nodo (tirante), mentre N_9 entra (puntone).

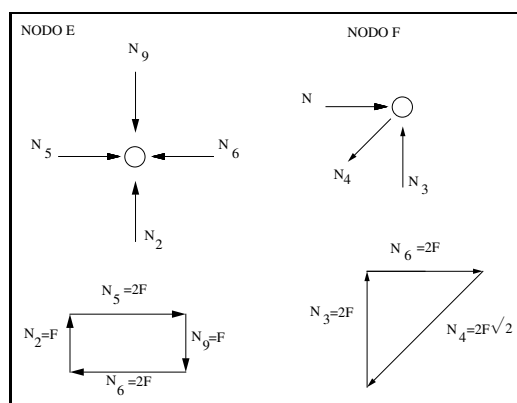


Figura 5.11

NODO D

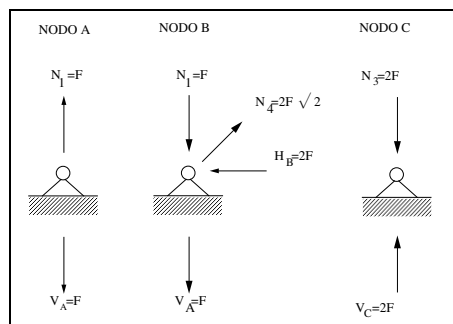
Noti N_8 e la forza esterna F non resta che determinare il valore di N_1 e N_5 . Dalla costruzione del poligono delle forze (figura 5.10) si ottiene per N_1 uno sforzo di trazione e per N_5 uno sforzo entrante nel nodo pari a $2F$, e quindi l'asta 5 risulta compressa.

NODO E

Noti N_5 e N_9 , le incognite sono N_2 e N_6 . Tracciato il poligono di equilibrio (figura ??), si vede come N_2 e N_6 risultino entranti al nodo e pertanto le due aste siano dei puntoni.

NODO F

Noto N_6 , le incognite sono gli sforzi N_3 e N_4 . Dal poligono di equilibrio, si vede come N_3 risulti entrante nel nodo (puntone), mentre N_4 sia uscente (tirante).

**Figura 5.12**

Dai valori determinati mediante gli equilibri ai nodi, si può osservare come le reazioni esterne, determinate mediante le equazioni cardinali della statica e l'equazione ausiliare risultino in equilibrio con gli sforzi interi. In figura 5.12 sono infatti riportati gli equilibri ai nodi A , B e C .

5.2.3 Individuazione del massimo sforzo di compressione e di trazione

Solo quattro sono le aste tese: la 1, la 2, la 4 e la 8; tutte le altre sono compresse fuorché la 7 che è scarica. Le aste 3, 5 e 6 sono quelle che sopportano il massimo sforzo di compressione pari a $2F$, mentre l'asta 4 è quella che sopporta il massimo sforzo di trazione pari a $2F\sqrt{2}$. (figura 5.12) In tabella si riportano i valori degli sforzi determinati nelle singole aste.

Asta	N_{max}
1	F
2	F
3	$-2F$
4	$2\sqrt{2}F$
5	$-2F$
6	$-2F$
7	0
8	$-\sqrt{2}F$
9	$-F$
10	$-F$

5.3 Esercizio n.5.3

Per la struttura reticolare in figura 5.13, determinare:

- le reazioni vincolari;
- gli sforzi normali nelle singole aste;
- il massimo sforzo di compressione e di trazione e le aste corrispondenti.

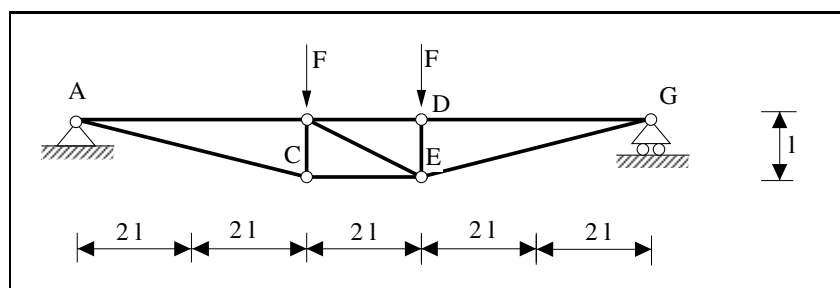


Figura 5.13

5.3.1 Calcolo delle reazioni vincolari

La struttura risulta costituita da maglie triangolari ed è dunque a nodi canonici, priva di sconnessioni interne. Pertanto costituisce un corpo rigido, vincolato esternamente mediante tre vincoli elementari tali da non permettere alcun cinematismo. La struttura è dunque isostatica. Infatti il computo dei vincoli porge: $a + v_c = 2n \rightarrow 9 + 3 = 12$.

Contrassegnati i nodi e numerate le aste (fig.5.14) si può procedere alla soluzione del problema.

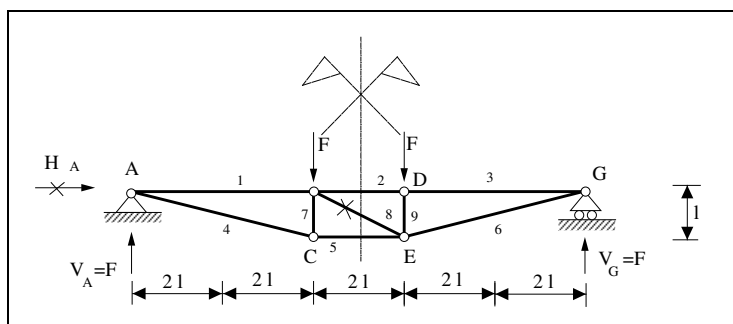


Figura 5.14

Le reazioni esterne sono facilmente ricavabili facendo ricorso alle sole equazioni della statica. Si osservi altresì come la struttura sia simmetrica e simmetricamente caricata, fuorchè per l'asta 8, posta in posizione centrale. Tale asta deve essere scarica (lo si verificherà con la ricerca degli sforzi normali nelle singole aste). La simmetria della struttura e del carico applicato semplifica la risoluzione del problema. Si scriva l'equazione di equilibrio alla traslazione verticale:

$$\uparrow) \quad V_A + V_G - 2F = 0 \rightarrow V_A + V_G = 2F$$

Per quanto si è detto sulla simmetria della struttura caricata anche in modo simmetrico, si può dedurre che:

$$V_A = V_G$$

e quindi:

$$2V_A = 2F \Rightarrow V_A = F = V_G$$

Inoltre dall'equilibrio alla traslazione orizzontale si ha:

$$\rightarrow) \quad H_A = 0$$

5.3.2 Ricerca degli sforzi normali nelle singole aste

Per la ricerca degli sforzi normali nelle singole aste si adotta anche in questo caso il metodo dell'equilibrio dei nodi. Si fa notare come per questa struttura il triangolo fondamentale per la risoluzione grafica della determinazione degli sforzi (figura 5.15), abbia lati 1, 4, $\sqrt{17}$.

NODO A

Sul nodo A agisce V_A mentre sono incogniti gli sforzi delle aste 1 e 4. Dal triangolo delle forze si ricava che N_4 sia uscente dal nodo (tirante) e valga $\sqrt{17}F$, mentre N_1 sia entrante (puntone) e di modulo paria $4F$.

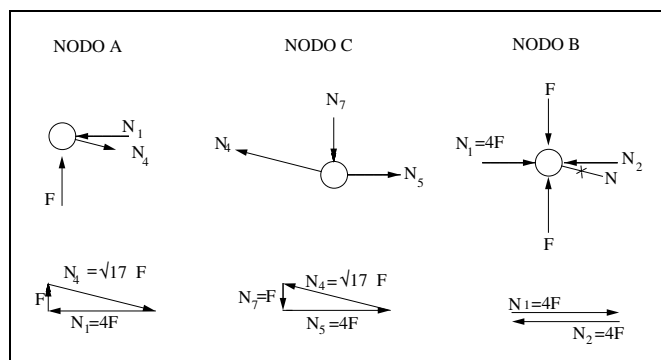


Figura 5.15

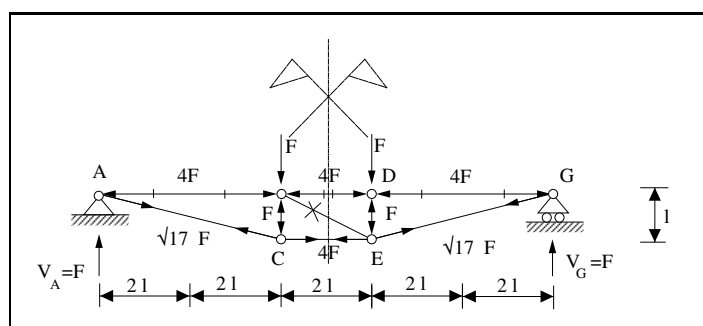


Figura 5.16

NODO C

N_4 è noto, le incognite sono N_7 e N_5 . Dalla figura 5.15 si ricava N_7 entrante nel nodo (asta 7 puntone) di valore F e N_5 uscente (asta 5 tirante) di valore $4F$.

NODO B

Noti N_7 , N_1 e il carico verticale esterno F non resta che determinare il valore di N_2 e N_8 . E' evidente che le forze verticali sono già fra loro bilanciate, non resta che equilibrare quelle orizzontali che saranno perciò uguali e contrarie: da cui $N_2 = 4F$ (puntone). Da questo equilibrio rimane fuori l'asta 8 che sarà perciò scarica, confermando quanto ipotizzato all'inizio.

Essendo poi la struttura simmetrica le restanti aste si comportano in modo simmetrico a quelle trovate.

5.3.3 Individuazione del massimo sforzo di compressione e di trazione

I correnti superiori e i due montanti sono tutti compressi, mentre i correnti inferiori sono tutte tese. Le aste 4 e 6 sono quelle che sopportano il massimo sforzo di trazione, mentre le aste 1, 2 e 3 il massimo sforzo di compressione (figura 5.16). I valori di tutti gli sforzi sono riportati in tabella.

Asta	N_{max}
1	$-4F$
2	$-4F$
3	$-4F$
4	$\sqrt{17}F$
5	$4F$
6	$\sqrt{17}F$
7	$-F$
8	0
9	$-F$

5.4 Esercizio n.5.4

Per la struttura reticolare in figura 5.17, determinare:

- le reazioni vincolari;
- gli sforzi normali nelle singole aste;
- il massimo sforzo di compressione e di trazione e le aste corrispondenti.

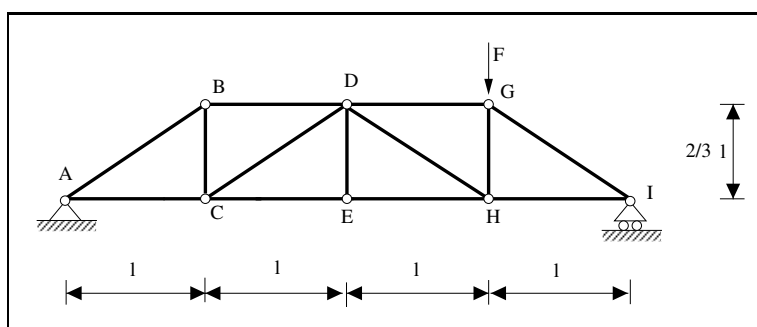


Figura 5.17

5.4.1 Calcolo delle reazioni vincolari

La struttura di figura 5.17 rappresenta una classica travatura Howe, tutta costituita da triangoli e priva di sconnessioni interne. Come nel caso precedente, i nodi sono tutti canonici, la struttura costituisce un unico corpo rigido. I vincoli esterni, cerniera in A e carrello a scorrimento orizzontale in I sono tali da non consentire alcun atto di moto rigido. La struttura è pertanto isostatica.

Per determinare le tre reazioni vincolari elementari, si applicano le equazioni cardinali della statica.

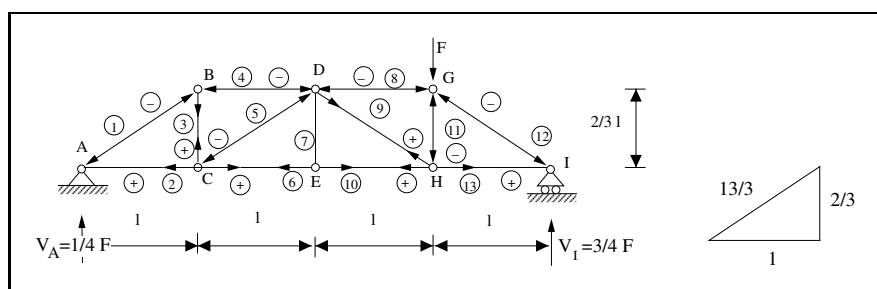


Figura 5.18

$$\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow) \quad H_A = 0 \\ A) \quad V_I \times 4l - F \times 3l = 0 \Rightarrow \quad V_I = \frac{3}{4}F \\ \uparrow) \quad V_A + \frac{3}{4}F - F = 0 \Rightarrow \quad V_A = \frac{1}{4}F \end{array} \right. \quad (5.14)$$

5.4.2 Ricerca degli sforzi normali nelle singole aste.

Per la determinazione degli sforzi si deve partire, utilizzando il metodo dei nodi, da un nodo canonico, ovvero da un nodo in cui afferiscano solo due aste. In questo caso si parte dal nodo A . In figura 5.19 sono riportati i triangoli e poligoni di equilibrio per i nodi A , B , C e E . Si osservi come per la risoluzione grafica si utilizzi il triangolo fondamentale di lati 3 , 2 , $\sqrt{13}$, riportato in figura 5.18. In figura 5.20 sono poi riportati gli equilibri per i restanti nodi.

Per verifica dei risultati ottenuti, si consideri la sezione di Ritter relativa alle aste 4 , 5 e 6 (figura ??). A tal fine, si ipotizzino gli sforzi nelle tre aste come uscenti dalle aste stesse, ovvero si ipotizzino a priori come tiranti. Dalle equazioni di equilibrio si determineranno gli sforzi. Se il valore di ciascuno sforzo sarà positivo, il verso scelto a priori verrà confermato, viceversa andrà invertito. Si scriva l'equilibrio alla rotazione intorno a C . Da questa equazione si determina lo sforzo per l'asta 4 .

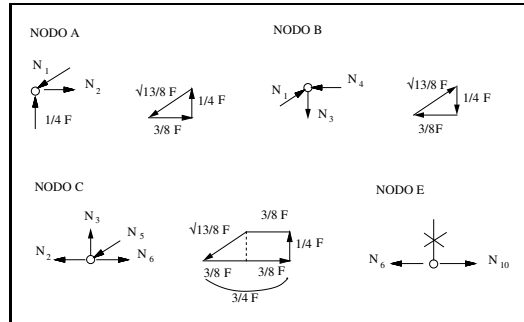


Figura 5.19

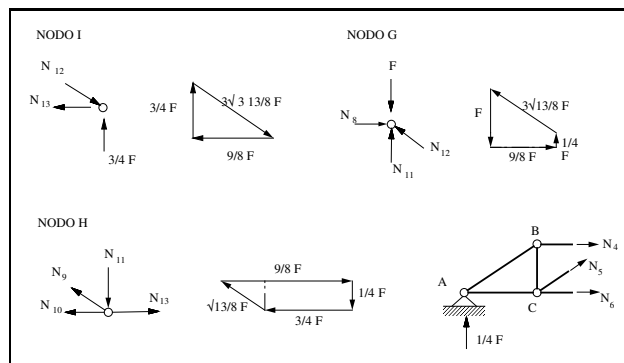


Figura 5.20

$$B) \quad -\frac{1}{4}F \times l - N_4 \times \frac{2}{3}l = 0 \Rightarrow N_4 = -\frac{3}{8}F$$

5.4.3 Individuazione del massimo sforzo di compressione e di trazione

In tabella sono riportati i valori degli sforzi nelle 13 aste che costituiscono la travatura reticolare. Il massimo sforzo di compressione si osserva nell'asta 12, pari a $\frac{3\sqrt{13}}{8}F$, mentre il massimo sforzo di trazione si ha nell'asta 13, pari a $\frac{9}{8}F$.

Asta	Sforzo
1-AB	$-\frac{\sqrt{13}}{8}F$
2-AC	$\frac{3}{8}F$
3-BC	$\frac{1}{4}F$
4-BD	$-\frac{3}{8}F$
5-CD	$-\frac{\sqrt{13}}{8}F$
6-CE	$\frac{3}{4}F$
7-DE	0
8-DG	$-\frac{9}{8}F$
9-DH	$\frac{\sqrt{13}}{8}F$
10-EH	$\frac{3}{4}F$
11-GH	$-\frac{1}{4}F$
12-GI	$-3\frac{\sqrt{13}}{8}F$
13-HI	$\frac{9}{8}F$

5.5 Esercizio n.5.5

Per la struttura reticolare in figura 5.21, determinare:

- le reazioni vincolari;
- gli sforzi normali nelle singole aste;
- il massimo sforzo di compressione e di trazione e le aste corrispondenti.

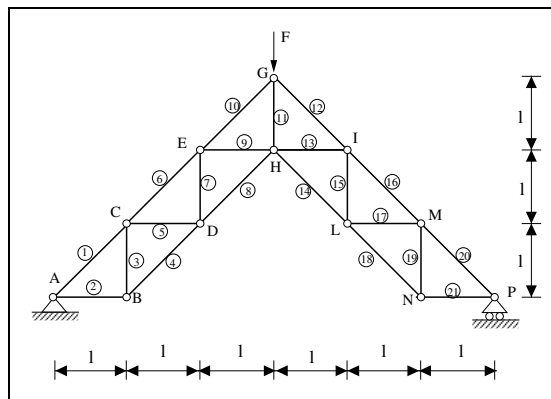


Figura 5.21

5.5.1 Calcolo delle reazioni vincolari

La struttura risulta costituita da maglie triangolari, senza sconnessioni interne e con nodi canonici. I vincoli esterni sono posizionati in modo da non permettere cinematismi. La struttura é dunque isostatica. Il computo dei vincoli porge infatti: $a + v_c = 2n \Rightarrow 21 + 3 = 24$.

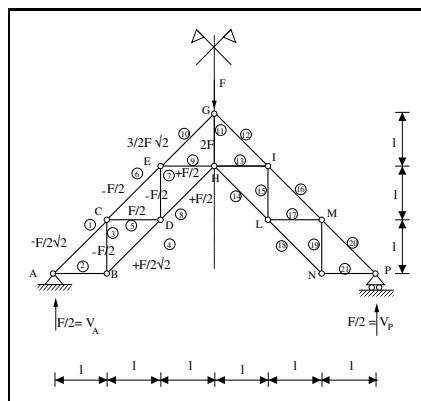


Figura 5.22

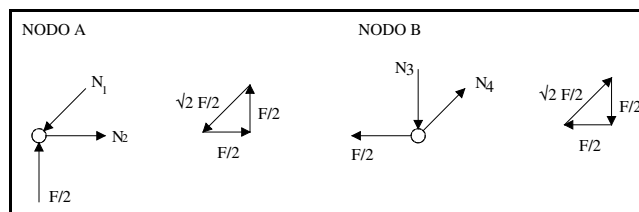


Figura 5.23

Le reazioni vincolari si determinano applicando le equazioni cardinali della statica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow) \quad H_A = 0 \\ A) \quad -F \times 3l + V_P \times 6l = 0 \Rightarrow V_P = \frac{1}{2}F \\ \uparrow) \quad V_A + V_P = F \Rightarrow V_A = \frac{1}{2}F \end{array} \right. \quad (5.15)$$

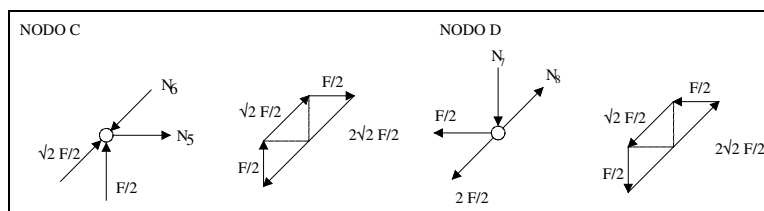


Figura 5.24

5.5.2 Ricerca degli sforzi normali nelle singole aste

La struttura è simmetrica e simmetricamente caricata. E' quindi sufficiente il calcolo degli sforzi nella metà di sinistra. Le maglie sono caratterizzate da un triangolo rettangolo isoscele con lati $1 : 1 : \sqrt{2}$. In figura 5.23 sono riportati gli equilibri per i nodi A e B , mentre in figura 5.24 quelli relativi ai nodi C e D . In figura 5.25 sono infine riportati i poligoni di equilibrio per i nodi E e G .

In figura 5.26 è riportato il diagramma in scala degli sforzi normali. I tratti più scuri rappresentano gli sforzi di compressione e sono relativi ai correnti superiori, mentre i correnti inferiori risultano tesi. In figura 5.27 è riportata la deformata elastica qualitativa. Si noti come ovviamente le aste restino rettilinee a deformazione avvenuta e non subiscano inflessioni, dal momento che sono soggette al solo sforzo normale.

I valori degli sforzi nelle singole aste così determinati, sono riportati nella tabella seguente.

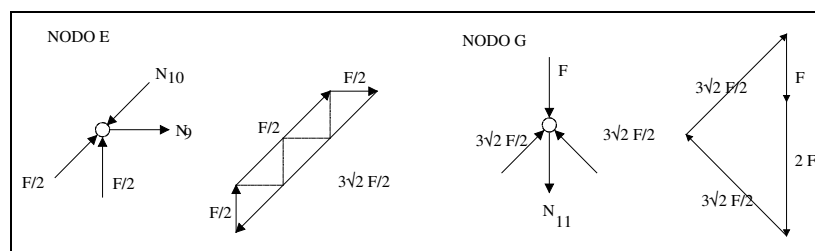


Figura 5.25

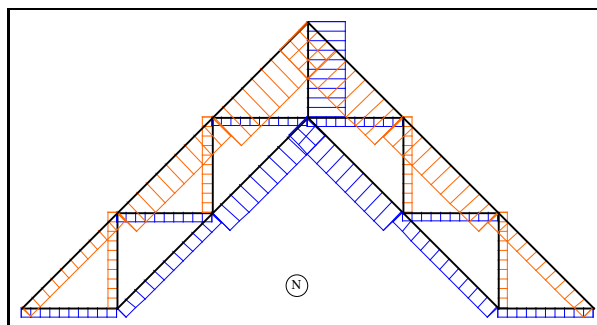


Figura 5.26

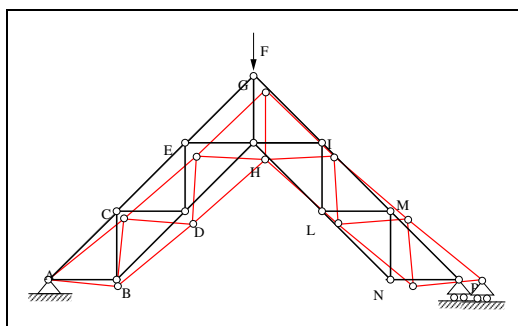


Figura 5.27

Asta	Sforzo
1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}F$
2	$\frac{F}{2}$
3	$-\frac{F}{2}$
4	$-\frac{\sqrt{2}}{2}F$
5	$\frac{F}{2}$
6	$-\sqrt{2}F$
7	$-\frac{F}{2}$
8	$\sqrt{2}F$
9	$\frac{1}{2}F$
10	$-3\frac{\sqrt{2}}{2}F$
11	$2F$

5.5.3 Individuazione del massimo sforzo di compressione e di trazione

Il massimo sforzo di compressione, pari a $-3\frac{\sqrt{2}}{2}F$, si ha nelle aste 10 e 12 mentre il massimo sforzo di trazione si ha nell'asta 11, pari a $2F$.

5.6 Esercizio n.5.6

Per la struttura reticolare in figura 5.28, determinare:

- le reazioni vincolari;
- gli sforzi normali nelle singole aste;
- il massimo sforzo di compressione e di trazione e le aste corrispondenti.

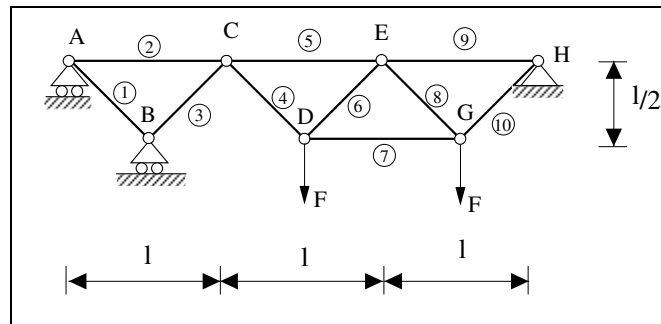


Figura 5.28

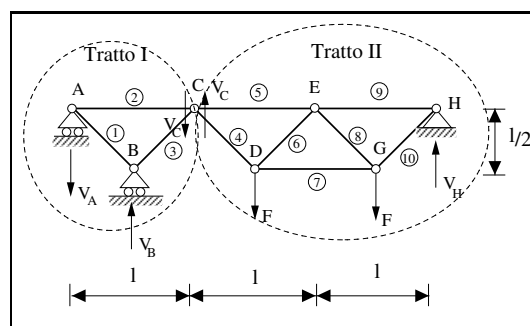


Figura 5.29

5.6.1 Calcolo delle reazioni vincolari

La struttura di figura 5.28 risulta costituita da due corpi rigidi costituiti rispettivamente dalla maglia triangolare ABC quello di sinistra (tratto I di figura 5.29) e dalle tre maglie $CDEGH$ quello di destra (tratto II). Si tratta di un arco a tre cerniere, delle quali due proprie (in C e in H) ed una impropria costituita dai due carrelli a scorrimento orizzontale in A e in B (doppio pendolo).

Come al solito, la presenza della sconnessione interna, richiede, al fine di garantire l'isostaticità della struttura, che i vincoli elementari esterni siano in numero pari a 4. Si ha infatti: $a + v_c = 2n \Rightarrow 10 + 4 = 2 \times 7 = 14$. In altri termini, il carrello aggiuntivo in B nasce dalla mancanza nella struttura dell'asta tra i nodi B e D .

Per determinare le reazioni vincolari si analizzi il tratto II scrivendo dapprima l'equazione ausiliaria in C per determinare la componente verticale della cerniera in H (la componente orizzontale ha braccio nullo rispetto a C):

Tratto II:

$$\begin{cases} C) & -F \times \frac{l}{2} - F \times \frac{3}{2}l + V_H \times 2l = 0 \Rightarrow V_H = F \\ \uparrow) & V_C = F \end{cases} \quad (5.16)$$

Tratto I:

$$\begin{cases} A) & V_B \times \frac{l}{2} - Fl = 0 \Rightarrow V_B = 2F \\ \uparrow) & V_A = F \end{cases} \quad (5.17)$$

Dall'equilibrio alla traslazione orizzontale per l'intera struttura, si deduce infine come la componente orizzontale della cerniera in H sia nulla.

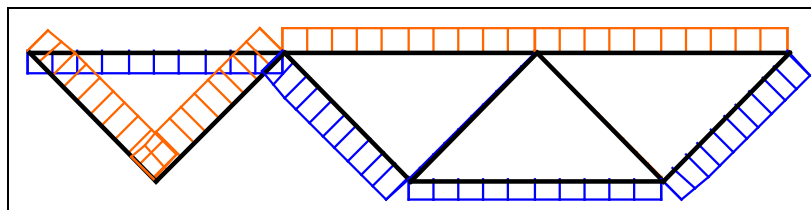


Figura 5.30

5.6.2 Ricerca degli sforzi normali nelle singole aste

Come nel caso precedente, il triangolo fondamentale per la ricerca grafica degli sforzi nelle singole aste è il triangolo rettangolo isoscele di lati $1 : 1 : \sqrt{2}$. Il valore degli sforzi per le 10 aste è riportato nella tabella, mentre in figura 5.30 si riporta il diagramma in scala dello sforzo normale. I tratti più scuri sono di trazione.

Infine, in figura 5.31 è riportata la deformata elastica qualitativa.

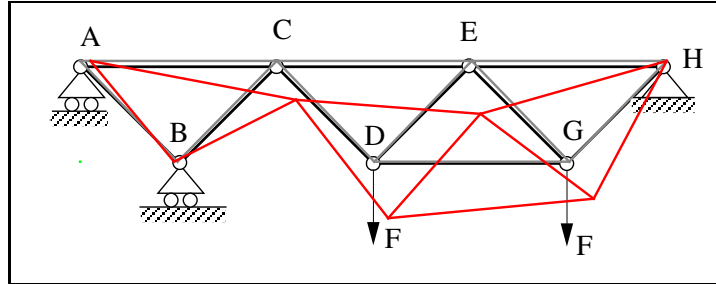


Figura 5.31

5.6.3 Individuazione del massimo sforzo di compressione e di trazione.

Dalla tabella si deduce che il massimo sforzo di trazione pari a $\sqrt{2}F$ si ha nelle aste 4 e 10, mentre il massimo sforzo di compressione pari a $-\sqrt{2}F$ si ha nelle aste 1 e 3.

Asta	Sforzo	
1	$-\sqrt{2}F$	max compressione
2	F	
3	$-\sqrt{2}F$	max compressione
4	$\sqrt{2}F$	max trazione
5	$-F$	
6	0	
7	F	
8	0	
9	$-F$	
10	$\sqrt{2}F$	max trazione

5.7 Esercizio n.5.7

Per la struttura reticolare in figura 5.32, determinare:

- le reazioni vincolari;
- gli sforzi normali nelle singole aste;
- il massimo sforzo di compressione e di trazione e le aste corrispondenti.

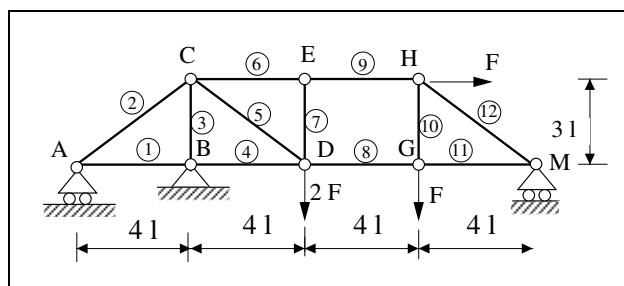


Figura 5.32

5.7.1 Calcolo delle reazioni vincolari

Come nel caso precedente, la struttura in figura 5.32 è analoga a quella di figura 5.17. Nel presente caso, è stato eliminato un diagonale, creando così una sconnessione interna. L'eliminazione di un'asta impone la presenza di un vincolo elementare esterno aggiuntivo. In figura 5.33 è riportata una schematizzazione della struttura costituita dal tratto I di sinistra, vincolato esternamente dal carrello in A e dalla cerniera in B e quindi globalmente fisso, e dal tratto II di destra che risulta vincolato esternamente in M mediante un carrello a scorrimento orizzontale e internamente con il tratto I tramite un doppio pendolo. Il doppio pendolo è costituito dalle aste EH e DG .

Per determinare le reazioni vincolari si deve scrivere un'equazione ausiliaria. Risulta conveniente scrivere l'equilibrio alla traslazione verticale per il tratto II:

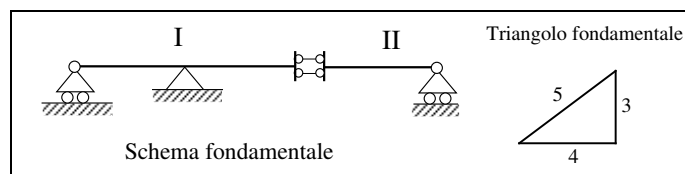


Figura 5.33

Tratto II:

$$\uparrow) \quad V_M = F$$

Intera struttura:

$$\left\{ \begin{array}{l} B) \quad V_M \times 12l - F \times 3l - F \times 8l - 2F \times 4l + V_A \times 4l = 0 \Rightarrow V_A = \frac{7}{4}F \\ \rightarrow) \quad H_B = F \\ \uparrow) \quad -2F - F + F - \frac{7}{4}F + V_B = 0 \Rightarrow V_B = \frac{15}{4}F \end{array} \right. \quad (5.18)$$

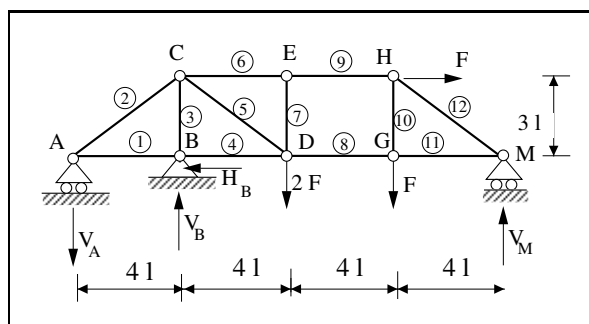


Figura 5.34

5.7.2 Ricerca degli sforzi normali nelle singole aste.

Il triangolo fondamentale da utilizzare per la determinazione degli sforzi nella struttura, riportato in figura 5.33, ha lati pari a 3:4:5. Si cominci dal nodo M da cui si possono dedurre, figura 5.35, gli sforzi nelle aste 11 e 12. Dall'equilibrio al nodo G si determinano poi i valori di N_8 e di N_{10} , e dal nodo H N_9 .

Gli equilibri relativi al tratto I sono riportati in figura 5.36. In figura 5.37 si riporta il diagramma in scala dello sforzo normale, dove analogamente ai casi precedenti, le trazioni sono indicate con un tratto più scuro. La deformata elastica qualitativa è disegnata in figura 5.38.

I valori degli sforzi nelle singole aste sono riportati in tabella. L'asta 3 risulta avere il massimo sforzo di compressione, mentre il massimo sforzo di trazione si ha nell'asta 5.

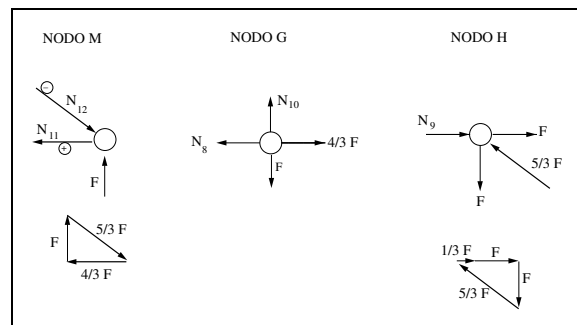


Figura 5.35

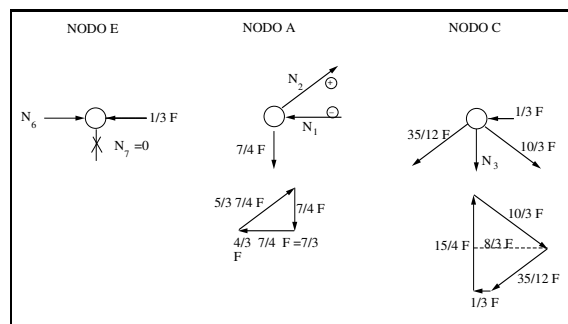


Figura 5.36

Asta	Sforzo	
1	$-\frac{7}{3}F$	
2	$\frac{35}{12}F$	
3	$-\frac{15}{4}F$	max compressione
4	$-\frac{4}{3}F$	
5	$\frac{10}{3}F$	max trazione
6	$-\frac{1}{3}F$	
7	0	
8	$\frac{4}{3}F$	
9	$-\frac{1}{2}F$	
10	F	
11	$\frac{4}{3}F$	
12	$-\frac{5}{3}F$	

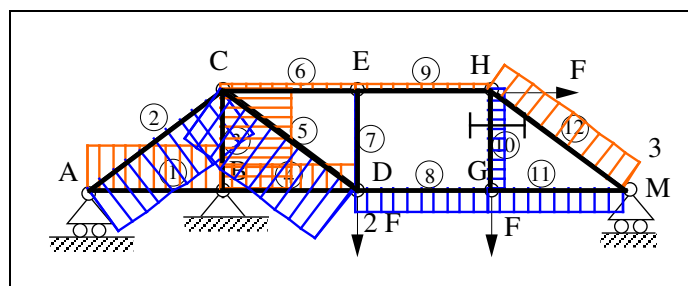


Figura 5.37

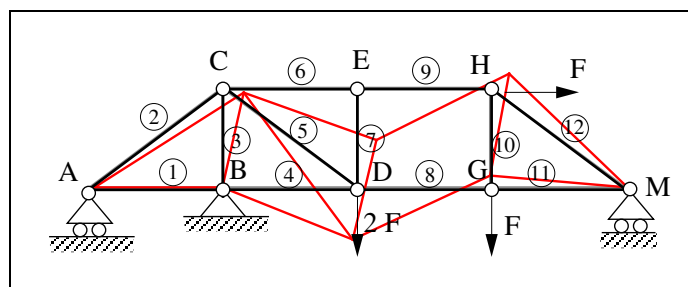


Figura 5.38

5.8 Esercizio n.5.8

Per la struttura reticolare in figura 5.39, determinare:

- le reazioni vincolari;
- gli sforzi normali nelle singole aste;
- il massimo sforzo di compressione e di trazione e le aste corrispondenti.

5.8.1 Calcolo delle reazioni vincolari

La struttura in esame (figura 5.39) è costituita da 2 maglie triangolari incernierate agli estremi (corpi rigidi) vincolate tra loro in C ed al suolo in B e D . La struttura può pertanto considerarsi come un arco a tre cerniere.

Il computo dei vincoli porge in ogni caso il seguente risultato: a = (numero delle aste)=6; n (numero dei nodi cerniera)=5; v_c (numero dei vincoli elementari esterni)=4;

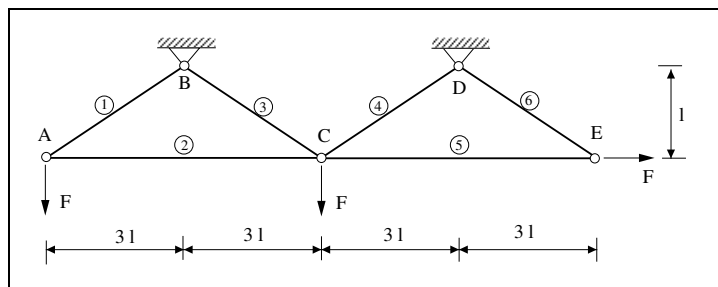


Figura 5.39

$$a + v_c = 2n; 6 + 4 = 10.$$

Per determinare le reazioni vincolari si consideri l'equilibrio alla rotazione dell'intera struttura intorno a B . Ipotizzando in D una reazione tale che le componenti orizzontale e verticale siano dirette verso sinistra e verso l'alto, si osserva come la componente orizzontale non abbia braccio rispetto alla cerniera in B , passando la sua retta di azione proprio per B . Si ha allora:

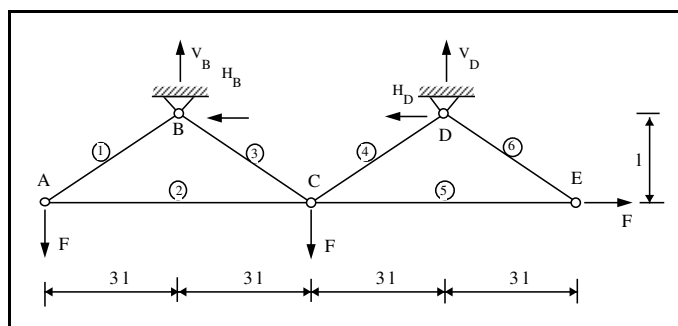


Figura 5.40

$$B) \quad F \times 3l - F \times 3l + F \times 2l + V_D \times 6l = 0 \quad \Rightarrow \quad V_D = -\frac{1}{3}F \quad (5.19)$$

Il segno negativo della reazione indica che il verso ipotizzato a priori non è corretto e che pertanto la componente verticale della reazione in D è diretta verso il basso. Dall'equazione alla traslazione verticale dell'intera struttura si ha:

$$\uparrow) \quad V_B = F + F + \frac{1}{3}F = \frac{7}{3}F \quad (5.20)$$

Per determinare le componenti orizzontali delle reazioni delle cerniere esterne è conveniente fare ricorso alle equazioni ausiliarie. L'equilibrio alla rotazione del tratto II intorno a C porge:

$$C) \quad -\frac{1}{3}F \times 3l + H_D \times 2l = 0 \Rightarrow H_D = \frac{F}{2} \quad (5.21)$$

mentre dall'equilibrio alla traslazione orizzontale dell'intera struttura si ha:

$$\rightarrow) \quad H_B = \frac{1}{2}F \quad (5.22)$$

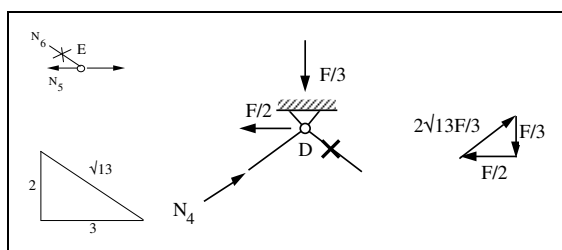


Figura 5.41

5.8.2 Ricerca degli sforzi normali nelle singole aste.

Per risolvere la struttura, si utilizzi il metodo dei nodi, e si consideri per tale struttura il triangolo fondamentale in figura 5.41.

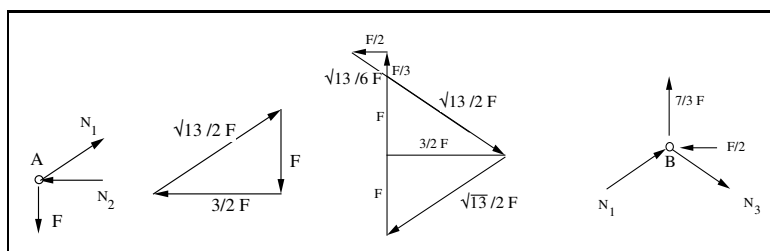


Figura 5.42

L'equilibrio alla traslazione verticale del nodo E indica come l'asta 6 sia scarica mentre l'asta 5 sia soggetta ad uno sforzo di trazione pari a F , figura 5.42. Infatti lo sforzo uscente dal nodo indica uno sforzo di trazione, mentre la forza entrante uno

sforzo di compressione. L'equilibrio del nodo D porge uno sforzo di compressione per l'asta 4 pari a $\frac{\sqrt{13}}{6}F$ (figura 5.41).

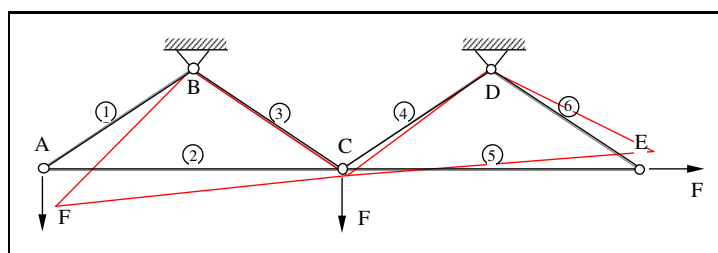


Figura 5.43

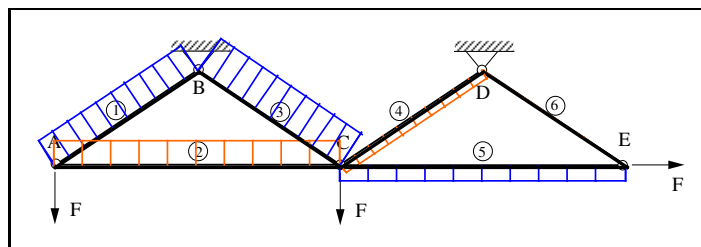


Figura 5.44

Dall'equilibrio del nodo A si determina lo sforzo dell'asta 1, tesa con uno sforzo pari a $\frac{\sqrt{13}}{6}F$ (fig.5.43), e dell'asta 2, compressa con uno sforzo pari a $\frac{3}{2}F$.

L'equilibrio del nodo B invece porta a determinare lo sforzo dell'asta 3, come somma di due contributi: $\frac{\sqrt{13}}{2}F$ (fig.5.42) e $\frac{\sqrt{13}}{6}F$.

Il massimo sforzo di trazione si ha in corrispondenza dell'asta 3 pari a $\frac{2}{3}\sqrt{13}F$ mentre il massimo sforzo di compressione si ha nell'asta 2 pari a $-1.5F$. I valori degli sforzi normali per tutte le aste sono riportate in tab.1, mentre nelle due figure successive si riportano il diagramma degli sforzi normali e la deformata elastica.

Asta	N_{max}
1	$\frac{\sqrt{13}}{2}F = 1.8 F$
2	$-\frac{3}{2}F = -1.5 F$
3	$\frac{2\sqrt{13}}{3}F = 2.4 F$
4	$-\frac{\sqrt{13}}{6}F = -0.6 F$
5	F
6	0

5.9 Temi proposti

Risolvere le strutture reticolari seguenti, determinando per ciascuna:

- le reazioni vincolari;
- gli sforzi normali nelle singole aste;
- il massimo sforzo di compressione e di trazione e le aste corrispondenti.

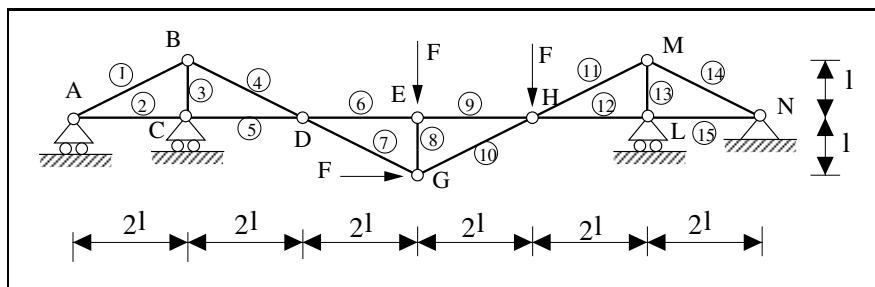


Figura 5.45

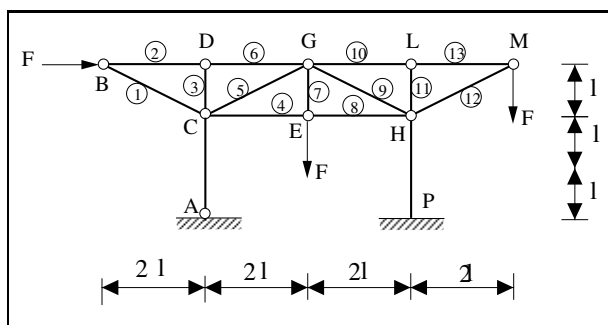


Figura 5.46

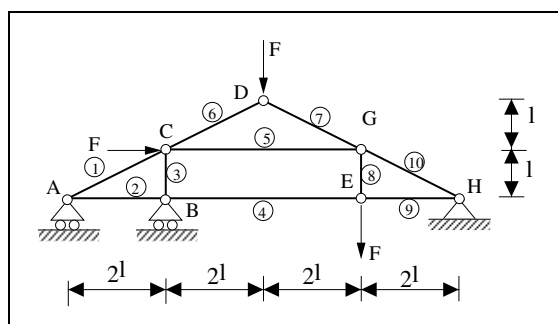


Figura 5.47

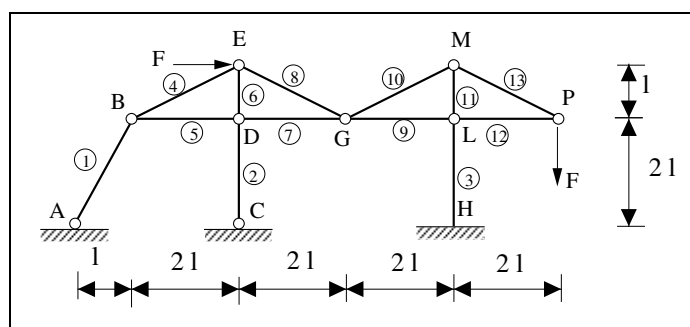


Figura 5.48

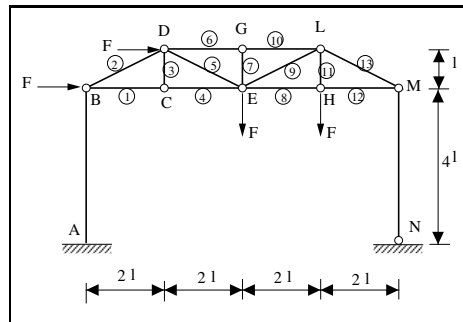


Figura 5.49

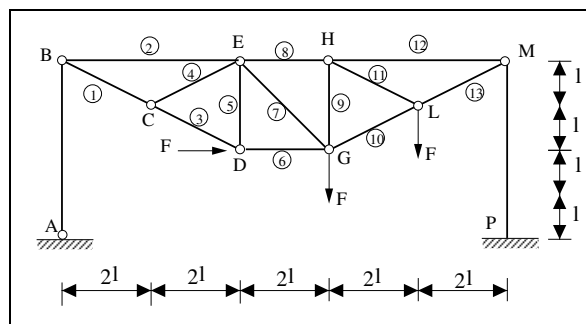


Figura 5.50

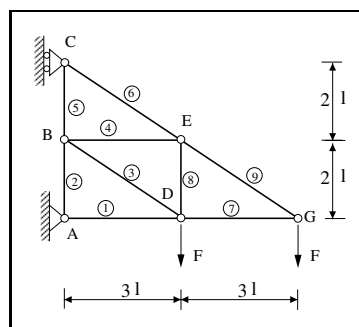


Figura 5.51

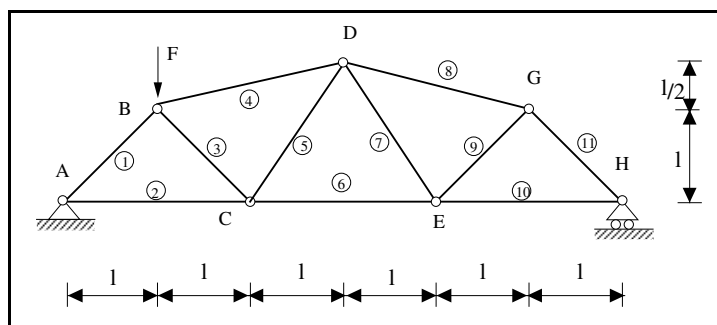


Figura 5.52

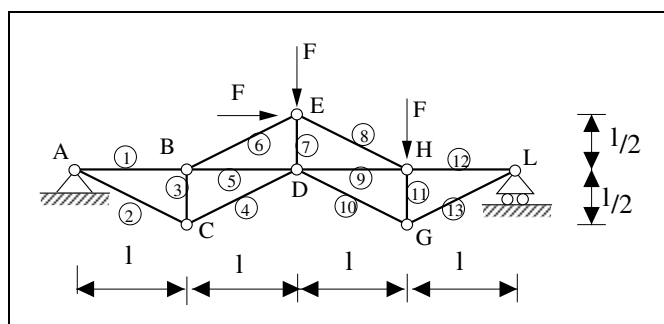


Figura 5.53

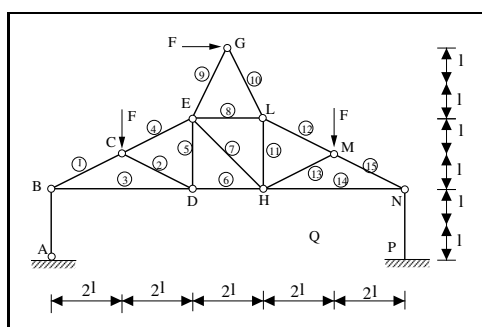


Figura 5.54

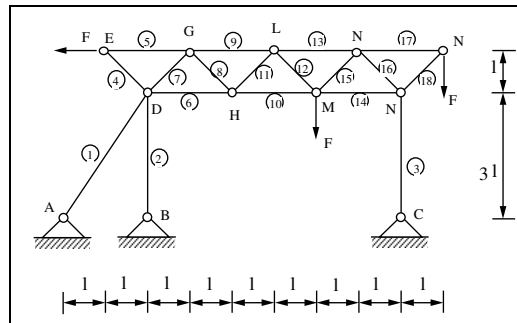


Figura 5.55

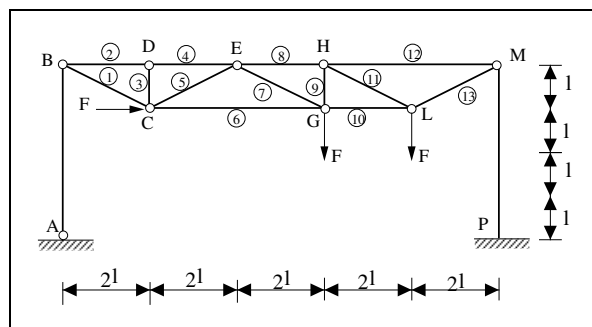
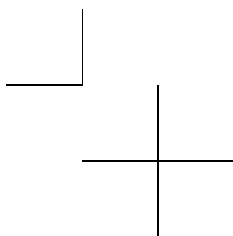
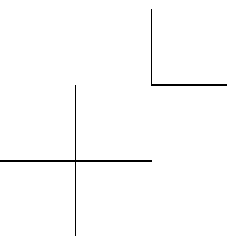
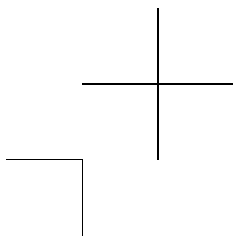
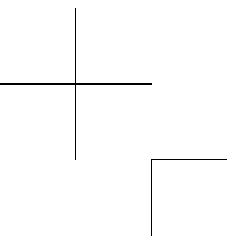


Figura 5.56



Capitolo 6

Geometria delle aree

6.1 Esercizio n. 6.1

Per la sezione in figura 6.1, costituita da tre tubi sottili di raggio esterno $R=50$ mm e spessore $\delta=2$ mm, con i rispettivi baricentri posti in corrispondenza dei vertici di un triangolo equilatero di lato $h=30$ cm, determinare:

- la posizione del baricentro;
- i momenti principali d'inerzia;
- il momento polare rispetto al baricentro.

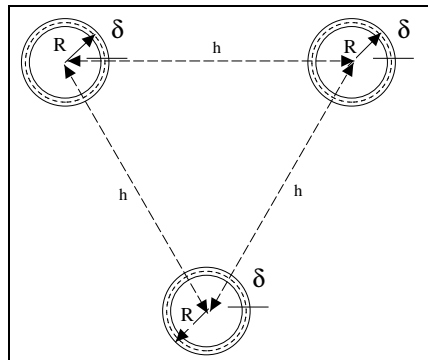


Figura 6.1

6.1.1 Ricerca della posizione del baricentro

Per prima cosa occorre fissare in modo opportuno il sistema di riferimento, per semplificare i calcoli: in questo caso, essendo la figura simmetrica, si può fissare l'asse y

coincidente con l'asse di simmetria y_G , mentre l'asse x passante per i singoli baricentri di due tubi (figura 6.2).

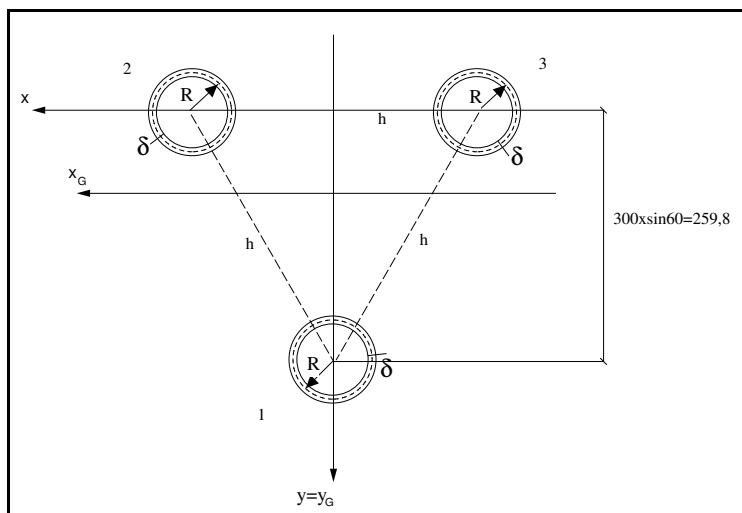


Figura 6.2

Per determinare la posizione del baricentro si calcoli innanzitutto l'area della sezione di ogni singolo tubo:

$$A = \pi(r_1^2 - r_2^2) = \pi(50^2 - 48^2) = \pi(2500 - 2304) = 615,7 \text{ mm}^2 \quad (6.1)$$

Si passi successivamente al calcolo dei momenti statici della sezione composta S_x e S_y , come somma dei singoli momenti statici relativi ai tre singoli tubi:

$$S_x = A_1 \times y_1 + A_2 \times y_2 + A_3 \times y_3 = 615,7(259,8 + 0 + 0) = 159958,8 \text{ mm}^3 \quad (6.2)$$

$$S_y = A(x_1 + x_2 + x_3) = 615,7(129,9 - 129,9) = 0$$

La posizione del baricentro é ora facilmente individuabile (figura 6.6):

$$y_G = \frac{S_x}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{S_x}{3A} = \frac{159958,8}{(3 \times 615,7)} = 86,6 \text{ mm} \quad (6.3)$$

$$x_G = 0$$

L'asse Y coincide infatti con quello di simmetria.

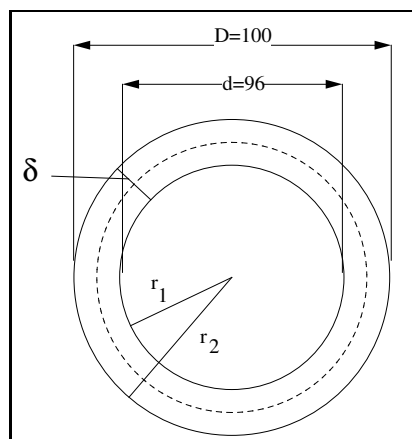


Figura 6.3

6.1.2 Ricerca dei momenti principali d'inerzia

Per il calcolo dei momenti principali d'inerzia, si determinino dapprima i momenti d'inerzia della sezione composta rispetto ai due assi baricentrici X_G e Y_G prima determinati, ed il relativo momento centrifugo $I_{x_G y_G}$.

Si cominci dalla determinazione del momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrico di ogni singolo tubo:

$$I_x = \frac{\pi}{4} \times (r_1^4 - r_2^4) = \frac{\pi}{4} (50^4 - 48^4) = 739496 \text{ mm}^4 = 73.9 \text{ cm}^4$$

Il momento d'inerzia globale sarà dato dalla somma dei contributi dei tre tubi:

$$\begin{aligned} I_{x_G x_G} &= I_{x_1} + A_1 \times d_1^2 + I_{x_2} + A_2 \times d_2^2 + I_{x_3} + A_3 \times d_3^2 = \\ &= (3 \times 739496) + 615,7(173,2^2 + 86,6^2 + 86,6^2) = 29923362 \text{ mm}^4 \\ &= 2992.3 \text{ cm}^4 \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$I_{y_G y_G} = (3 \times 739496) + 615,7(150^2 + 150^2) = 29923362 \text{ mm}^4 = 2992.3 \text{ cm}^4 = I_{x_G x_G}$$

$$I_{x_G y_G} = 0$$

L'eguaglianza dei due momenti rispetto agli assi X_G e Y_G e l'annullamento del momento centrifugo indica che la sezione in oggetto è giroscopica. Tutti gli assi passanti per il baricentro sono anche principali d'inerzia. Ciò si può dedurre dal degenerarsi del cerchio di Mohr in un punto e dal fatto che la sezione abbia tre assi di simmetria.

6.1.3 Ricerca del momento polare rispetto al baricentro

Il momento polare rispetto al baricentro G si ottiene sommando i momenti d'inerzia $I_{x_G x_G}$ e $I_{y_G y_G}$:

$$I_G = I_{x_G x_G} + I_{y_G y_G} = 2992.3 + 2992.3 = 5985 \text{ cm}^4$$

6.2 Esercizio n.6.2

Per la sezione composta in figura 6.4, costituita da una HE e da un profilato ad L, di spessore $\delta=5$ mm, costante per tutti i tratti, e con $h=10$ cm e $b=20$ cm, determinare:

- la posizione del baricentro;
- gli assi principali d'inerzia;
- i momenti principali d'inerzia .

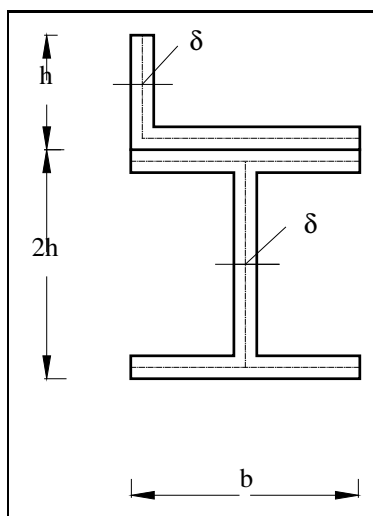


Figura 6.4

6.2.1 Ricerca della posizione del baricentro

La sezione composta in figura 6.4 si può considerare come sezione sottile, essendo lo spessore δ minore di un decimo della lunghezza dei singoli tratti che la costituiscono. In questi casi la sezione viene rappresentata e calcolata come se la sua area fosse tutta concentrata lungo la linea media ($\delta=5$ mm, $h=10$ cm=100 mm, $b=20$ cm=200 mm).

Per prima cosa occorre suddividere la sezione in 5 rettangoli sottili. Si fissi in modo opportuno un sistema di riferimento, per semplificare i calcoli, ovvero l'asse x in modo tale che coincida con la linea media dell'ala inferiore e l'asse y con la linea media dell'anima.

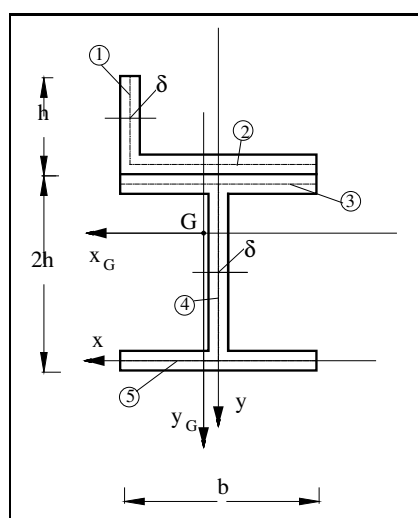


Figura 6.5

Si calcolino dapprima le aree dei 5 rettangoli:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = h \times \delta = 100 \times 5 = 500 \text{ mm}^2 \\ A_2 = A_3 = A_5 = 1000 \text{ mm}^2 \\ A_4 = 2h \times \delta = 200 \times 5 = 1000 \text{ mm}^2 \end{array} \right. \quad (6.5)$$

che sommate danno l'area totale:

$$A_{tot} = \sum_{i=1}^5 A^{(i)} = 500 + 1000 + 1000 + 1000 + 1000 = 4500 \text{ mm}^2 \quad (6.6)$$

Successivamente si calcolino i momenti statici dei singoli rettangoli rispetto all'asse x :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_x^{(1)} = A^{(1)} \times y_G^{(1)} = 500 \times \frac{5}{2}h = 500 \times 250 = 125000 \text{ mm}^3 = 125 \text{ cm}^3 \\ S_x^{(2)} = S_x^{(3)} = A^{(2)} \times y_G^{(2)} = 2 \times 1000 \times 2h = 200000 \text{ mm}^3 \\ S_x^{(4)} = A^{(4)} \times y_G^{(4)} = 1000 \times h = 100000 \text{ mm}^3 \\ S_x^{(5)} = A^{(5)} \times y_G^{(5)} = 0 \text{ mm}^3 \end{array} \right. \quad (6.7)$$

Sommando i singoli momenti statici si ha:

$$S_{x_{tot}} = \sum_{i=1}^5 S_x^{(i)} = 125000 + 2 \times 200000 + 100000 = 625000 \text{ mm}^3 = 625 \text{ cm}^3 \quad (6.8)$$

Si ripeta lo stesso procedimento per i momenti statici rispetto all'asse y :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_y^{(1)} = A^{(1)} \times x_G^{(1)} = 500 \times \frac{b}{2} = 500 \times 100 = 50000 \text{ mm}^3 \\ S_y^{(2)} = A^{(2)} \times x_G^{(2)} = 0 \\ S_y^{(3)} = A^{(3)} \times x_G^{(3)} = 0 \\ S_y^{(4)} = A^{(4)} \times x_G^{(4)} = 0 \\ S_y^{(5)} = A^{(5)} \times x_G^{(5)} = 0 \end{array} \right. \quad (6.9)$$

Sommando i singoli momenti statici si ottiene:

$$S_{y_{tot}} = \sum_{i=1}^5 S_y^{(i)} = 50000 \text{ mm}^3 = 50 \text{ cm}^3 \quad (6.10)$$

La posizione del baricentro si determina dal rapporto tra i momenti statici e l'area della sezione:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_G = \frac{S_y}{A_{tot}} = \frac{50000}{4500} = 11,1 \text{ mm} \\ y_G = \frac{S_x}{A_{tot}} = \frac{625000}{4500} = 138,8 \text{ mm} \end{array} \right. \quad (6.11)$$

6.2.2 Ricerca degli assi principali d'inerzia

Per determinare la posizione degli assi principali d'inerzia occorre calcolare prima i momenti d'inerzia rispetto agli assi baricentrici appena trovati. Calcolo del momento d'inerzia rispetto all'asse x_G :

$$\begin{aligned} I_{x_G} &= \sum_{i=1}^5 I_x^{(i)} = \frac{\delta h^3}{12} + \delta h \times \left(2h - y_G + \frac{h}{2}\right)^2 + \\ &+ 2 \times b \times \delta \times (2h - y_G)^2 + \delta \times \frac{2h^3}{12} + (y_G - h)^2 \times \delta \times 2h + \delta \times b \times (y_G)^2 = \\ &= 3819.4 \text{ cm}^4 \end{aligned} \quad (6.12)$$

Calcolo del momento d'inerzia rispetto all'asse y_G :

$$\begin{aligned} I_{y_G} &= \sum_{i=1}^5 I_y^{(i)} = \\ &= \delta h \times \left(\frac{b}{2} - x_G\right)^2 + 3 \times \frac{\delta \times b^3}{12} + 3b \times \delta \times x_G^2 + 2h \times \delta \times x_G^2 = \\ &= 1444.4 \text{ cm}^4 \end{aligned} \quad (6.13)$$

Calcolo del momento centrifugo rispetto agli assi x_G e y_G :

$$\begin{aligned} I_{x_G y_G} &= \sum_{i=1}^5 I_{xy}^{(i)} = \delta \times h \left(\frac{b}{2} - x_G\right) \times \left(-\frac{5}{2}h + y_G\right) + 2b \times \delta \times x_G \times (-2h + y_G) + \\ &+ 2h \times \delta \times x_G (y_G - h) + b \times \delta \times (y_G) \times (-x_G) = -555.5 \text{ cm}^4 \end{aligned} \quad (6.14)$$

Si possono ora trovare le direzioni principali d'inerzia, che sono quelle rispetto alle quali il momento centrifugo si annulla.

$$\vartheta = \frac{1}{2} \times \arctan \times \left(\frac{2I_{x_G y_G}}{I_{y_G} - I_{x_G}} \right) = \frac{1}{2} \times \arctan \times \left(\frac{-2 \times 555.5}{1444.4 - 3819.4} \right) = 12.53$$

L'angolo ϑ è risultato positivo: gli assi principali d'inerzia risultano perciò ruotati in senso antiorario rispetto a y_G e x_G .

6.2.3 Ricerca dei momenti principali d'inerzia

Il valore dei momenti principali d'inerzia I_ξ e I_η , di seguito determinati, risultano l'uno il massimo e l'altro il minimo fra i momenti d'inerzia calcolati rispetto a qualunque

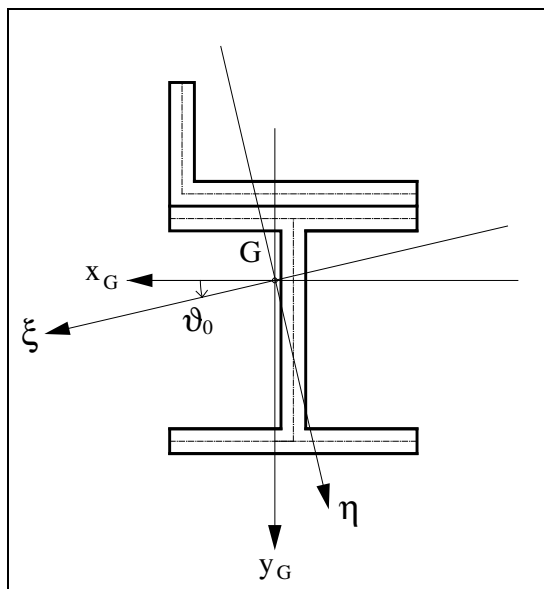


Figura 6.6

asse baricentrico.

$$\begin{aligned}
 I_{\xi} &= \frac{(I_{x_G} + I_{y_G})}{2} + \frac{1}{2} \times \sqrt{(I_{x_G} - I_{y_G})^2 + 4I_{x_G y_G}^2} = \\
 &= \frac{(3819.4 + 1444.4)}{2} + \frac{1}{2} \times \sqrt{(3819.4 - 1444.4)^2 + 4 \times (-555.5)^2} = 3943.0 \text{ cm}^4
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

$$\begin{aligned}
 I_{\eta} &= \frac{(I_{x_G} + I_{y_G})}{2} - \frac{1}{2} \times \sqrt{(I_{x_G} - I_{y_G})^2 + 4I_{x_G y_G}^2} = \\
 &= \frac{(3819.4 + 1444.4)}{2} - \frac{1}{2} \times \sqrt{(3819.4 - 1444.4)^2 + 4 \times (-555.5)^2} = \\
 &= 1320.9 \text{ mm}^4
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

6.3 Esercizio n.6.3

Per la sezione compatta in figura 6.7, di dimensione caratteristica $a=10$ cm, determinare:

- la posizione del baricentro;
- gli assi principali d'inerzia;
- i momenti principali d'inerzia.

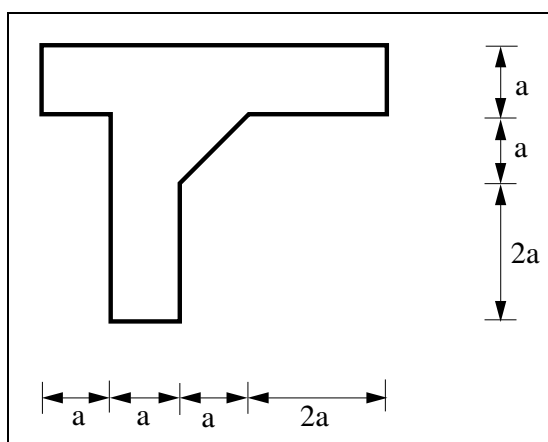


Figura 6.7

6.3.1 Ricerca della posizione del baricentro

Si suddivida la sezione in aree elementari, ovvero nei due rettangoli A e B , e nel triangolo C , dei quali si conoscono i relativi baricentri G_A, G_B, G_C . Si assumano poi degli assi di riferimento xy tangenti ai lati del rettangolo A (figura 6.8). Si cominci dal calcolo delle singole aree

$$A = A_A + A_B + A_C = 5a^2 + 3a^2 + \frac{1}{2}a^2 = \frac{17}{2}a^2$$

Si calcoli successivamente il momento statico S_x come somma dei singoli momenti statici $S_x^{(i)}$ relativi alle tre aree:

$$\begin{aligned} S_x &= A_A \times y_A + A_B \times y_B + A_C \times y_C = \\ &= \left(5a^2 \times \frac{5}{2}a\right) + \left(3a^2 \times \frac{3}{2}a\right) + \left(\frac{1}{2}a^2 \times \frac{7}{3}a\right) = a^3 \left(\frac{25}{2} + \frac{9}{2} + \frac{7}{6}\right) = \frac{109}{6}a^3 \end{aligned}$$

Si passi al calcolo del momento statico S_y come somma dei singoli momenti statici $S_y^{(i)}$ relativi alle tre aree:

$$S_y = A_A \times x_A + A_B \times x_B + A_C \times x_C =$$

$$\left(5a^2 \times \frac{1}{2}a\right) + \left(3a^2 \times \frac{5}{2}a\right) + \left(\frac{1}{2}a^2 \times \frac{4}{3}a\right) = a^3 \left(\frac{5}{2} + \frac{15}{2} + \frac{4}{6}\right) = \frac{32}{3}a^3$$

E' ora possibile determinare la posizione del baricentro G (figura 6.8)

$$x_G = \frac{S_y}{(A_A + A_B + A_C)} = \frac{\frac{32}{3}a^3}{\frac{7}{2}a^2} = \frac{64}{51}a = 1,25a$$

$$y_G = \frac{S_x}{(A_A + A_B + A_C)} = \frac{\frac{109}{6}a^3}{\frac{17}{2}a^2} = \frac{109}{51}a = 2,14a$$

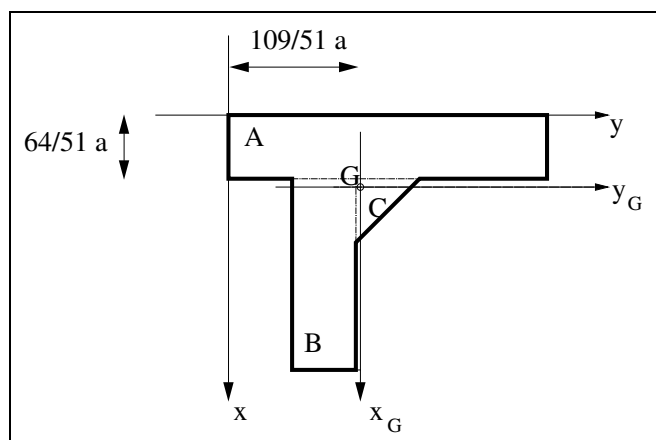


Figura 6.8

6.3.2 Ricerca degli assi principali d'inerzia

Posizionati gli assi baricentrici x_G e y_G , per individuare gli assi principali d'inerzia è necessario calcolare il tensore d'inerzia $[I]$ rispetto al sistema di riferimento baricentrico x_G, y_G . Si cominci dal calcolo del momento d'inerzia rispetto all'asse x_G :

$$I_x^{(A)} = \frac{1}{12}a \times (5a)^3 + 5a^2 \times \left(\frac{5}{2} - \frac{109}{51}\right)^2 \times a^2 = \frac{115220}{10404}a^4$$

$$I_x^{(B)} = \frac{3}{12}a \times a^3 + 3a^2 \times \left(\frac{3}{2} - \frac{109}{51}\right)^2 \times a^2 = \frac{15276}{10404}a^4$$

$$I_x^{(C)} = \frac{1}{36}a^4 + \frac{1}{2}a^2 \times \left(\frac{7}{3} - \frac{109}{51}\right)^2 \times a^2 = \frac{489}{10404}a^4$$

$$I_{x_G} = I_x^{(A)} + I_x^{(B)} + I_x^{(C)} = \frac{115220 + 15276 + 489}{10404}a^4 = \frac{130985}{10404}a^4 = 12,59a^4$$

Allo stesso modo si procede per trovare I_{y_G} :

$$I_y^{(A)} = \frac{1}{12} \times a^3 \times 5a + 5a^2 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{64}{51}\right)^2 \times a^2 = \left(\frac{5}{12} + \frac{29645}{10404}\right)a^4$$

$$I_y^{(B)} = \frac{27}{12}a^3 \times a + 3a^2 \times \left(\frac{5}{2} - \frac{64}{51}\right)^2 \times a^2 = \left(\frac{27}{12} + \frac{48387}{10404}\right)a^4$$

$$I_y^{(C)} = \frac{1}{36}a^4 + \frac{1}{2}a^2 \times \left(\frac{4}{3} - \frac{64}{51}\right)^2 \times a^2 = \left(\frac{1}{36} + \frac{72}{23409}\right)a^4$$

$$I_{y_G} = I_y^{(A)} + I_y^{(B)} + I_y^{(C)} = \left(\frac{5}{12} + \frac{29645}{10404} + \frac{27}{12} + \frac{48387}{10404} + \frac{1}{36} + \frac{72}{23409}\right)a^4 = 10,20a^4$$

Si calcoli infine il momento centrifugo:

$$I_{xy}^{(A)} = 5a^2 \times \left(\frac{64}{51} - \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{109}{51} - \frac{5}{2}\right)a^2 = -\frac{4810}{10404}a^4$$

$$I_{xy}^{(B)} = 3a^2 \times \left(\frac{64}{51} - \frac{5}{2}\right) \times \left(\frac{109}{51} - \frac{3}{2}\right)a^2 = \frac{10668}{15606}a^4$$

$$I_{xy}^{(C)} = \frac{1}{2}a^2 \times \left(\frac{109}{51} - \frac{7}{3}\right) \times \left(\frac{64}{51} - \frac{4}{3}\right)a^2 = \frac{432}{23409}a^4$$

$$I_{xy_G} = I_{xy}^{(A)} + I_{xy}^{(B)} + I_{xy}^{(C)} = \left(-\frac{4810}{10404} + \frac{10668}{15606} + \frac{432}{23409}\right)a^4 = -\frac{38930}{10404}a^4 = -1,89a^4$$

Si possono ora trovare le direzioni principali d'inerzia, imponendo l'annullamento del momento centrifugo \tilde{O} nullo:

$$\vartheta = \frac{1}{2} \times \arctan \left(\frac{2I_{x_G y_G}}{I_{y_G} - I_{x_G}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \times \arctan \left(\frac{2 \times -1.89}{10.20 - 12.59} \right) = \frac{1}{2} \times \arctan \left(\frac{3.78}{2.22} \right) = 29,77$$

L'angolo ϑ è risultato positivo: i nuovi assi di riferimento ruotano pertanto in senso antiorario rispetto a y_G e x_G (figura 6.9).

6.3.3 Ricerca dei momenti principali d'inerzia

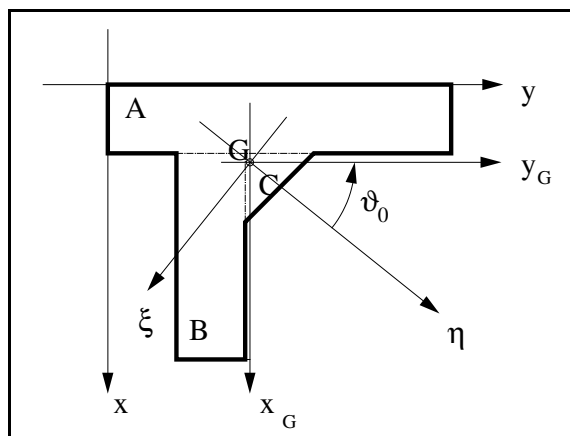


Figura 6.9

Si calcoli infine il valore dei momenti principali d'inerzia I_ξ e I_η .

$$I_\xi = \frac{(I_{x_G} + I_{y_G})}{2} + \frac{1}{2} \times \sqrt{(I_{x_G} - I_{y_G})^2 + 4I_{x_G y_G}^2} =$$

$$= \frac{(12.95 + 10.2)}{2} + \frac{1}{2} \times \sqrt{(12.59 - 10.2)^2 + 4 \times (-3.74)^2} = \quad (6.17)$$

$$= 15.32a^4 = 153200cm^4$$

$$\begin{aligned}
 I_{\eta} &= \frac{(I_{x_G} + I_{y_G})}{2} - \frac{1}{2} \times \sqrt{(I_{x_G} - I_{y_G})^2 + 4I_{x_G y_G}^2} = \\
 &= \frac{(12.95 + 10.2)}{2} - \frac{1}{2} \times \sqrt{(12.59 - 10.2)^2 + 4 \times (-3.74)^2} = \quad (6.18) \\
 &= 7.47a^4 = 74700cm^4
 \end{aligned}$$

6.4 Esercizio n.6.4

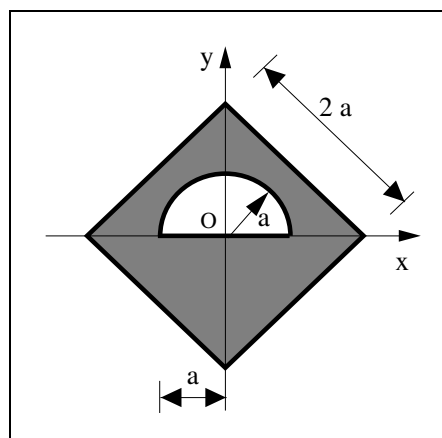


Figura 6.10

Per la sezione in figura 6.10, posto $a=20$ cm, determinare:

- la posizione del baricentro;
- gli assi principali d'inerzia;
- i momenti principali d'inerzia.

6.4.1 Ricerca della posizione del baricentro

La sezione di figura 6.10 rappresenta un quadrato di lato $2a$ con una cavità a forma di semicerchio di raggio a posta al di sopra della diagonale orizzontale. Si assuma come sistema di riferimento di partenza quello costituito dalle due diagonali del quadrato, con asse y asse di simmetria. Indicato con 1 il quadrato e con 2 il semicerchio, l'area della sezione si calcola sottraendo l'area del semicerchio a quella del quadrato:

$$A = A^{(1)} - A^{(2)} = 4a^2 - \pi \frac{a^2}{2} = (4 - \frac{\pi}{2})a^2$$

Anche per i momenti statici, si deve calcolare il momento statico del quadrato e sottrarre quello del semicerchio. I momenti statici rispetto all'asse y sono nulli, essendo y asse di simmetria.

$$S_x = S_x^{(1)} - S_x^{(2)} = 0 - \frac{2}{3}a^3 = -\frac{2}{3}a^3$$

Il baricentro della sezione vale pertanto:

$$\begin{cases} Y_G = \frac{S_x}{A} = -\frac{\frac{2}{3}a^3}{(4 - \frac{\pi}{2})a^2} = -0.274a \\ X_G = 0 \end{cases} \quad (6.19)$$

In figura 6.11 è riportato il sistema baricentrico così determinato.

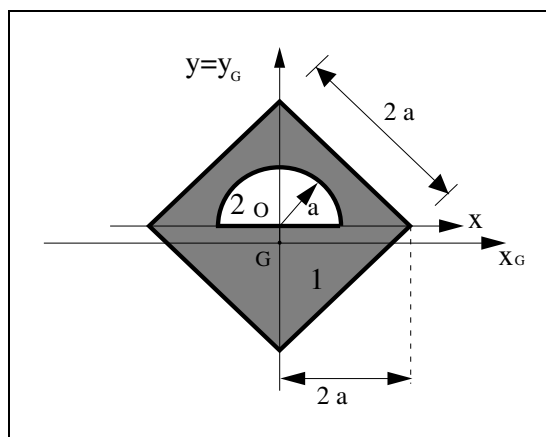


Figura 6.11

6.4.2 Assi e momenti principali d'inerzia

Il sistema di riferimento x_G, y_G , oltre ad essere baricentrico, risulta anche principale d'inerzia, essendo, come sopra detto, y_G asse di simmetria. Si calcoli dunque il momento principale d'inerzia rispetto all'asse $x_G = \xi$.

$$I_\xi = I_{x_G x_G}^{(1)} - I_{x_G x_G}^{(2)}$$

$$I_{x_G x_G}^{(1)} = I_{xx} + A^{(1)}y_G^2 = \frac{(2a)^4}{12} + 4a^2 \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{4 - \frac{\pi}{2}} \right)^2 a^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{16}{12}a^4 + \frac{4a^4 \times 4}{9 \times (4 - \frac{\pi}{2})^2} = 1.634a^4 \\
I_{x_G x_G}^{(2)} &= I_{xx}^{(2)} + A^{(2)}y_{00}^2 - 2y_0 \times S_x^{(2)} = \\
&= \frac{1}{8}\pi a^4 + \frac{\pi}{2}a^2 \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{4 - \frac{\pi}{2}}\right)^2 a^2 + 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{a}{4 - \frac{\pi}{2}} \times \frac{2}{3}a^3 = 0.877a^4 \\
I_\xi &= I_{xx}^{(1)} - I_{xx}^{(2)} = (1.634 - 0.877)a^4 = 121120 \text{ cm}^4
\end{aligned}$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse $y_G = \eta$ vale:

$$\begin{aligned}
I_{y_G y_G} &= I_{yy}^{(1)} - I_{yy}^{(2)} \\
I_{yy}^{(1)} &= \frac{(2a)^4}{12} = \frac{4}{3}a^4 \\
I_{yy}^{(2)} &= \frac{\pi}{8}a^4 \\
I_{yy} &= \left(\frac{4}{3} - \frac{\pi}{8}\right)a^4 = 0.941 = 150501 \text{ cm}^4
\end{aligned}$$

mentre risulta $I_{xy} = 0$, trattandosi di assi principali.

6.5 Esercizio n.6.5

Per la sezione sottile in figura 6.12, posto $R=20$ cm e $\delta=1$ cm, determinare:

- la posizione del baricentro;
- gli assi principali d'inerzia;
- i momenti principali d'inerzia.

6.5.1 Ricerca della posizione del baricentro

La sezione è caratterizzata da tre assi di simmetria. Si tratta di una sezione giroscopica, ellisse centrale d'inerzia con diametri massimi e minimi coincidenti (cerchio). Tutti gli assi baricentrici sono anche principali d'inerzia. Il baricentro coincide con il centro della stella. E' pertanto necessario il calcolo del solo I_{xx} , essendo i momenti d'inerzia rispetto ad un qualsiasi asse baricentrico uguali.

$$I_{x_G x_G}^{(1)} = \pi \delta R^3$$

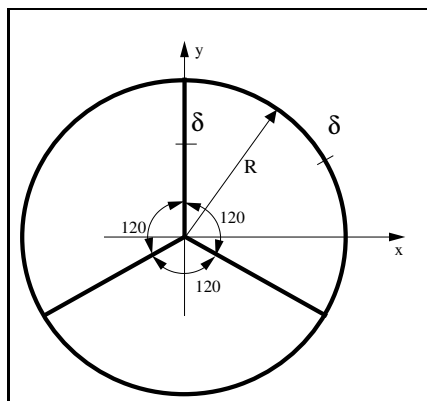


Figura 6.12

$$I_{x_G x_G}^{(2)} = \frac{1}{12} \delta R^3 + \delta R \times \left(\frac{R}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} \delta R^3$$

$$I_{x_G x_G}^{(3)} = I_{x_G x_G}^{(4)} = \frac{1}{12} \delta R^3 \times \sin^2(30) + \delta R \times \left(\frac{R}{4} \right)^2 = \frac{1}{12} \delta R^3$$

$$I_{x_G x_G}^{(tot)} = \pi \delta R^3 + \frac{1}{3} \delta R^3 + 2 \frac{1}{12} \delta R^3 = \delta R^3 \left(\pi + \frac{1}{2} \right) = 3,64 \delta R^3$$

Posto $R = 20$ cm e $\delta = 1$ cm si ottiene:

$$I_{x_G x_G}^{(tot)} = 29132.7 \text{ cm}^4$$

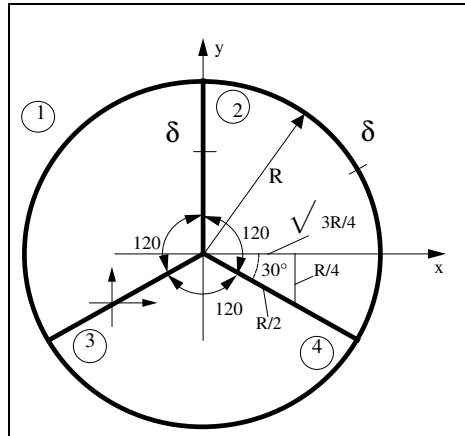


Figura 6.13

6.6 Esercizio n.6.6

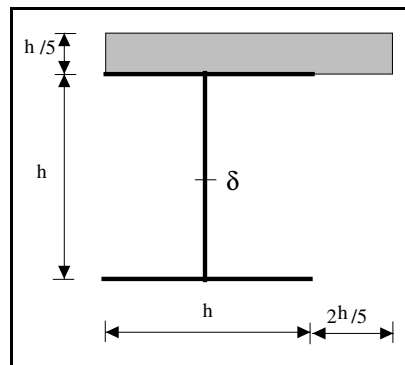


Figura 6.14

Per la sezione sottile in figura 6.14, costituita da un profilato sottile tipo HE e da un rettangolo pieno, posto $h=15$ cm e $\delta=2$ cm, determinare:

- la posizione del baricentro;
- gli assi principali di inerzia;
- i momenti principali d'inerzia.

6.6.1 Ricerca della posizione del baricentro

Si consideri il sistema di riferimento come indicato in figura 6.15. Si calcoli l'area della sezione:

$$A = 2 \times (h \times \delta) + h \times \delta + \frac{h}{5} \times \left(h + \frac{2h}{5} \right) = h \left(3\delta + \frac{7h}{25} \right) = 153 \text{ cm}^2 \quad (6.20)$$

Si passi al calcolo del momento statico S_x rispetto all'asse x :

$$\begin{aligned} S_x &= S_x^{(2)} + S_x^{(3)} + S_x^{(4)} = \\ &= \left[h \times \delta \frac{h}{2} \right]_{(2)} + [h \times \delta \times h]_{(3)} + \left[\frac{h}{5} \times \frac{7h}{5} \times \left(h + \frac{h}{10} \right) \right]_{(4)} = 1714,5 \text{ cm}^2 \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} S_y &= S_{y1} + S_{y2} + S_{y3} + S_{y4} = \\ &= h \times \delta \frac{h}{2} + h \times \delta \frac{h}{2} + h \times \delta \frac{h}{2} + \frac{h}{5} \times \frac{7h}{5} \times \frac{7h}{10} = h^2 \left(\frac{3}{2}\delta + \frac{49}{250}h \right) = 1336,5 \text{ cm}^2 \end{aligned} \quad (6.22)$$

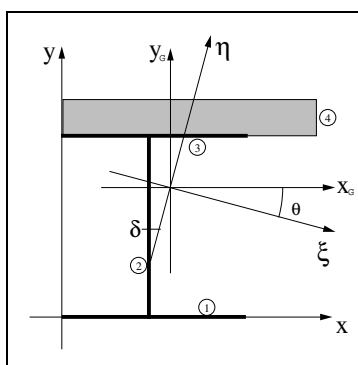


Figura 6.15

La posizione del baricentro si determina come segue:

$$\begin{aligned}x_G &= \frac{S_y}{A} = 8,735 \text{ cm} \\y_G &= \frac{S_x}{A} = 11,206 \text{ cm}\end{aligned}\tag{6.23}$$

6.6.2 Ricerca degli assi principali d'inerzia

Posizionati gli assi baricentrici x_G e y_G , per individuare gli assi principali d'inerzia si calcoli il tensore d'inerzia $[I]$ rispetto al sistema di riferimento baricentrico. L'HE può essere analizzato come una sezione sottile. Pertanto per i rettangoli 1, 2 e 3 si trascurano i momenti d'inerzia rispetto all'asse di ogni singolo tratto. Si cominci dal momento d'inerzia rispetto all'asse x_G :

$$\begin{aligned}I_{x_G} &= I_{x_G}^{(1)} + I_{x_G}^{(2)} + I_{x_G}^{(3)} + I_{x_G}^{(4)} = \\&= [h \times \delta \times (11,206)^2]_{(1)} + \left[\frac{1}{12} \times h^3 \times \delta + h \times \delta \times (11,206 - 7,5)^2 \right]_{(2)} + \\&\quad + [h \times \delta \times (15 - 11,206)^2]_{(3)} + \\&\quad + \left[\frac{1}{12} \times \frac{7h}{5} \left(\frac{h}{5} \right)^3 \right]_{(4)} + \left[\frac{h}{5} \times \frac{7h}{5} \left(\frac{h}{10} + h - 11,206 \right)^2 \right]_{(4)} = 6986,45 \text{ cm}^4\end{aligned}\tag{6.24}$$

Allo stesso modo si procede per trovare I_{y_G} :

$$\begin{aligned}I_{y_G} &= I_{y_G}^{(1)} + I_{y_G}^{(2)} + I_{y_G}^{(3)} + I_{y_G}^{(4)} = \\&= 2 \left(\frac{1}{12} \times h^3 \times \delta + h \times \delta \times (8,735 - 7,5)^2 \right) + \\&\quad + h \times \delta \times (8,735 - 7,5)^2 + \frac{1}{12} \times \frac{h}{5} \left(\frac{7h}{5} \right)^3 + \\&\quad + \frac{h}{5} \times \frac{7h}{5} \times \left(8,735 - \frac{7h}{10} \right)^2 = 3773,79 \text{ cm}^4\end{aligned}\tag{6.25}$$

Si calcoli infine il momento centrifugo:

$$\begin{aligned}
I_{x_G y_G} &= I_{x_G y_G}^{(1)} + I_{x_G y_G}^{(2)} + I_{x_G y_G}^{(3)} + I_{x_G y_G}^{(4)} = \\
&= 30 \times (-8,735 + 7,5) \times (-11,206) + \\
&+ 30 \times (-8,735 + 7,5) \times (-11,206 + 7,5) + \\
&+ 30 \times (-11,206 + 15) \times (-8,735 + 7,5) + \\
&+ 63 \times (-8,735 + 10,5) \times (15 + 1,5 - 11,206) = 1000,59 \text{ cm}^4
\end{aligned} \tag{6.26}$$

Si possono ora trovare le direzioni principali d'inerzia, che sono quelle rispetto alle quali si annulla il momento centrifugo.

$$\vartheta = \frac{1}{2} \times \arctan \left(\frac{2I_{x_G y_G}}{I_{y_G} - I_{x_G}} \right) = -15,96^\circ$$

L'angolo ϑ è risultato negativo: i nuovi assi di riferimento ruotano perciò in senso orario rispetto a y_G e x_G .

6.6.3 Ricerca dei momenti principali d'inerzia

I momenti principali d'inerzia I_ξ e I_η , valutati rispetto agli assi principali, rappresentano l'uno il massimo e l'altro il minimo tra tutti i momenti d'inerzia baricentrici.

$$I_\xi = \frac{(I_{x_G} + I_{y_G})}{2} + \frac{1}{2} \times \sqrt{(I_{x_G} - I_{y_G})^2 + 4I_{x_G y_G}^2} = \text{cm}^4 \tag{6.27}$$

$$I_\eta = \frac{(I_{x_G} + I_{y_G})}{2} - \frac{1}{2} \times \sqrt{(I_{x_G} - I_{y_G})^2 + 4I_{x_G y_G}^2} = 3487,6 \text{ cm}^4 \tag{6.28}$$

6.7 Esercizio n.6.7

Per la sezione sottile in figura 3.1, posto $h=20$ cm e $\delta=2$ cm, determinare:

- la posizione del baricentro;
- gli assi principali d'inerzia;
- i momenti principali d'inerzia.

6.7.1 Ricerca della posizione del baricentro

Si posiziona il sistema di riferimento in modo da far passare l'asse x per i baricentri del rettangolo 2 e del cerchio 3. L'asse y sia ortogonale a x e passante per il baricentro del rettangolo 2. L'area della sezione vale:

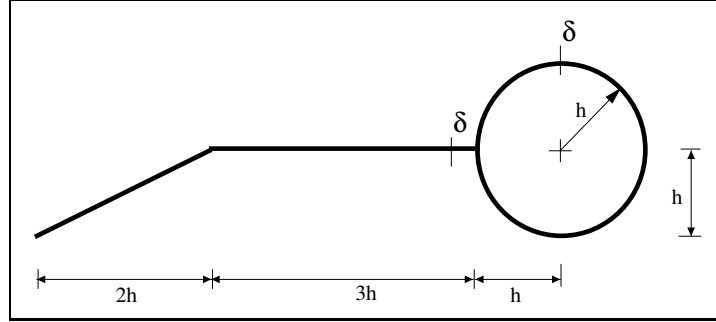


Figura 6.16

$$A = A^{(1)} + A^{(2)} + A^{(3)} = \sqrt{5}h\delta + 3h\delta + 2\pi h\delta = (\sqrt{5} + 3 + 2\pi)h\delta = 11.52h\delta$$

Si calcolino i momenti statici rispetto al sistema di riferimento scelto. Rispetto all'asse x vale:

$$S_x = S_x^{(1)} + S_x^{(2)} + S_x^{(3)} = \sqrt{5}h\delta \times \left(-\frac{h}{2}\right) + 0 + 0 = -1.12h^2\delta$$

Rispetto all'asse y vale:

$$S_y = S_y^{(1)} + S_y^{(2)} + S_y^{(3)} = \sqrt{5}h\delta \times \left(-\frac{5}{2}h\right) + 0 + 2\pi h\delta \times \frac{5}{2}h = 10.12h^2\delta$$

Il baricentro si trova nel punto con le seguenti coordinate:

$$\begin{cases} X_G = \frac{S_y}{A} = -0.097h \\ Y_G = \frac{S_x}{A} = 0.878h \end{cases} \quad (6.29)$$

6.7.2 Assi principali d'inerzia

Si passi al calcolo del tensore d'inerzia rispetto al sistema di riferimento baricentrico con gli assi paralleli a quelli scelti inizialmente. Per semplicità nei calcoli si ponga:

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse x vale:

$$I_{x_G} = I_{x_G}^{(1)} + I_{x_G}^{(2)} + I_{x_G}^{(3)}$$

$$I_{x_G}^{(1)} = \left(\delta \times \frac{(\sqrt{5}h)^3}{12} \right) \times \sin^2 \alpha + \sqrt{5}\delta h \times \left(\frac{h}{2} + y_G \right)^2 = 0.5493h^3\delta$$

$$I_{x_G}^{(2)} = 3h\delta \times y_G^2 = 0.0283h^3\delta$$

$$I_{x_G}^{(3)} = \frac{2\pi}{2}\delta h^3 + 2h\delta y_G^2 = 3.2008h^3\delta$$

$$I_x = 3.7784h^3\delta$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse y vale:

$$I_{y_G} = I_{y_G}^{(1)} + I_{y_G}^{(2)} + I_{y_G}^{(3)}$$

$$I_{y_G}^{(1)} = \left(\delta \times \frac{(\sqrt{5}h)^3}{12} \right) \times \cos^2 \alpha + \sqrt{5}\delta h \times \left(\frac{5h}{2} + x_G \right)^2 = 26.2654h^3\delta$$

$$I_{y_G}^{(2)} = \frac{1}{12}\delta \times (3h)^3 + 3h\delta x_G^2 = 4.5642h^3\delta$$

$$I_{y_G}^{(3)} = \pi\delta h^3 + 2\pi h\delta \times \left(\frac{5}{2}h - x_G \right)^2 = 19.6658h^3\delta$$

$$I_y = 50.4954h^3\delta$$

Il momento centrifugo vale infine:

$$I_{x_G y_G} = I_{x_G y_G}^{(1)} + I_{x_G y_G}^{(2)} + I_{x_G y_G}^{(3)}$$

$$I_{x_G y_G}^{(1)} = \left(\delta \times \frac{(\sqrt{5}h)^3}{12} \right) \times \sin \alpha \times \cos \alpha + \sqrt{5}\delta h \times \left(\frac{h}{2} + y_G \right) \times \left(\frac{5}{2}h + x_G \right) = 3.4162h^3\delta$$

$$I_{x_G y_G}^{(2)} = 3h\delta \times x_G \times y_G = -0.2558h^3\delta$$

$$I_{x_G y_G}^{(3)} = 2\pi h \delta \times y_G \times \left(\frac{5}{2}h - x_G \right) = 0.9894 h^3 \delta$$

$$I_{xy} = 4.1498 h^3 \delta$$

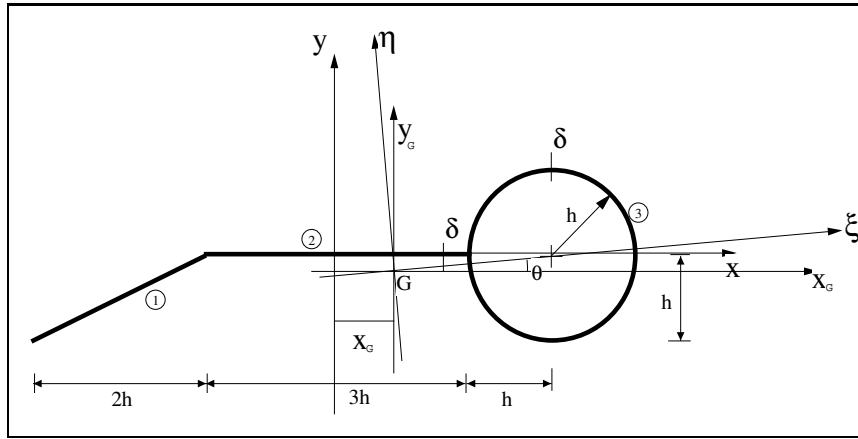


Figura 6.17

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{1}{2} \times \arctan \left(\frac{2I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \times \arctan \left(\frac{2 \times 4.1498}{50.4954 - 3.7784} \right) = 5.0369 \end{aligned}$$

L'angolo ϑ è risultato positivo: i nuovi assi di riferimento ruotano in senso antiorario rispetto a y_G e x_G .

6.7.3 Ricerca dei momenti principali d'inerzia

Si calcolino i valori dei momenti principali d'inerzia I_ξ e I_η .

$$I_\xi = \frac{(I_{xx} + I_{yy})}{2} + \frac{1}{2} \times \sqrt{(I_{xx} - I_{yy})^2 + 4I_{xy}^2} = 50.86 h^3 \delta \quad (6.30)$$

$$I_\eta = \frac{(I_{xx} + I_{yy})}{2} - \frac{1}{2} \times \sqrt{(I_{xx} - I_{yy})^2 + 4I_{xy}^2} = 3.41 h^3 \delta \quad (6.31)$$

6.8 Esercizio n.6.8

Per la sezione in figura 6.18, determinare:

- la posizione del baricentro;
- i momenti principali d'inerzia;
- il momento polare rispetto al baricentro.

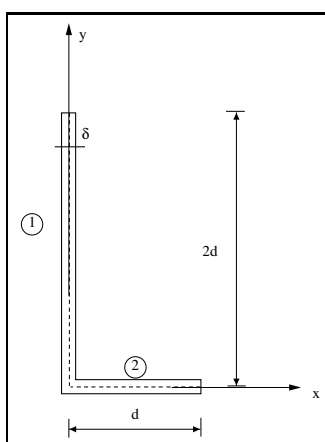


Figura 6.18

6.8.1 Ricerca della posizione del baricentro

Per prima cosa occorre fissare in modo opportuno il sistema di riferimento, al fine di semplificare i calcoli: in questo caso si può fissare l'asse y coincidente con la linea media del tratto verticale e l'asse X con la linea media del tratto orizzontale. La sezione sottile può considerarsi come somma di due aree elementari (rettangoli) indicati rispettivamente con 1, quello verticale e 2 quello orizzontale.

L'area della sezione vale:

$$A = A^{(1)} + A^{(2)} = 2\delta d + \delta d = 3\delta d \quad (6.32)$$

mentre i momenti statici S_x e S_y valgono

$$\begin{aligned} S_x &= S_x^{(1)} + S_x^{(2)} = 2\delta d \times d + 0 = 2\delta d^2 \\ S_y &= S_y^{(1)} + S_y^{(2)} = 0 + d\delta \times \frac{d}{2} = \frac{1}{2}d^2\delta \end{aligned} \quad (6.33)$$

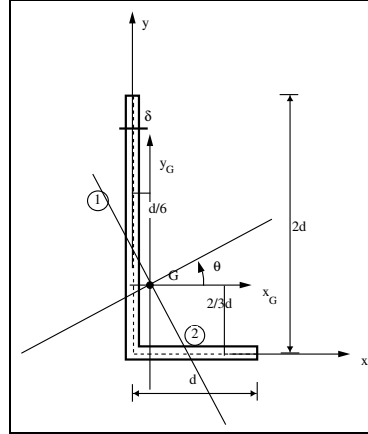


Figura 6.19

Si osservi come i momenti statici $S_x^{(2)}$ e $S_y^{(1)}$ risultino nulli, essendo i baricentri delle due aree posizionate sugli assi. La posizione del baricentro è ora facilmente individuabile (figura 6.19):

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{S_y}{A} = \frac{d^2 \delta}{6d\delta} = \frac{d}{6} \\ y_G &= \frac{S_x}{A} = \frac{2d^2 \delta}{3d\delta} = \frac{2d}{3} \end{aligned} \quad (6.34)$$

Il baricentro G si trova lungo la retta che unisce i baricentri delle due aree elementari.

6.8.2 Ricerca dei momenti principali d'inerzia

Per determinare gli assi principali d'inerzia si calcolino inizialmente i momenti d'inerzia e centrifughi rispetto agli assi centrali x_G , y_G .

$$I_{xx} = I_{xx}^{(1)} + I_{xx}^{(2)} = \frac{1}{12}(2d)^3 \delta + 2d\delta \left(\frac{d}{3}\right)^2 + d\delta \left(\frac{2}{3}d\right)^2 = \frac{4}{3}d^3 \delta$$

$$I_{yy} = I_{yy}^{(1)} + I_{yy}^{(2)} = 2d\delta \times \frac{d^2}{36} + \frac{1}{12}(d)^3 \delta + d\delta \left(\frac{1}{3}d\right)^2 = \frac{1}{4}d^3 \delta$$

$$I_{xy} = I_{xy}^{(1)} + I_{xy}^{(2)} = 2d\delta \times \frac{1}{3}d \times \left(-\frac{1}{6}d\right) + d\delta \times \left(-\frac{2}{3}d\right) \times \left(\frac{1}{3}d\right) = -\frac{1}{3}d^3 \delta$$

L'angolo di rotazione ϑ_0 compreso tra gli assi ξ ed x , che caratterizza gli assi

principali d'inerzia rispetto al sistema scelto precedentemente in modo arbitrario, vale quindi:

$$\vartheta_0 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}} = \frac{1}{2} \arctan \frac{-2/3}{7/12 - 10/9} = \frac{1}{2} \arctan \frac{-2/3}{-19/36} = \frac{1}{2} \arctan \frac{24}{19} = 25.78^\circ$$

Noto l'angolo di rotazione, i momenti principali d'inerzia si ottengono con la seguente formula:

$$I_\xi = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_{xx} - I_{yy})^2 + 4I_{xy}^2} = \frac{1}{24} (19 - \sqrt{233}) d^3 \delta$$

$$I_\eta = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_{xx} - I_{yy})^2 + 4I_{xy}^2} = \frac{1}{24} (19 + \sqrt{233}) d^3 \delta$$

6.9 Temi proposti

Per le sezioni seguenti determinare:

- la posizione del baricentro;
- gli assi principali d'inerzia;
- i momenti principali d'inerzia.

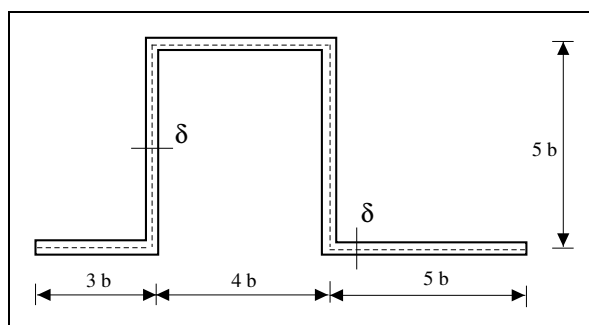


Figura 6.20

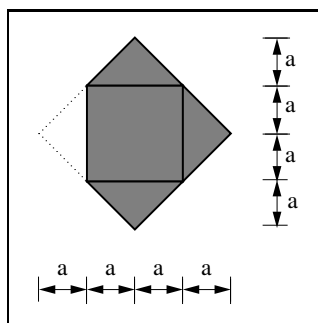


Figura 6.21

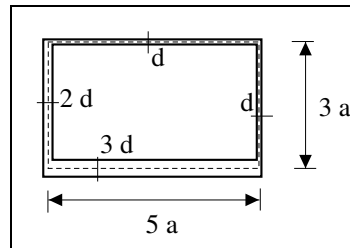


Figura 6.22

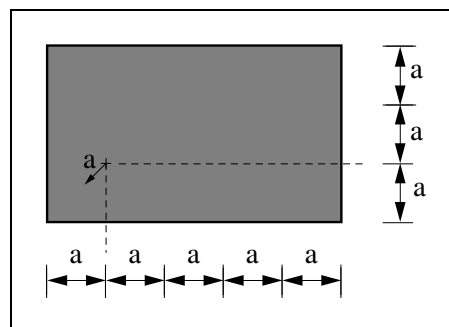


Figura 6.23

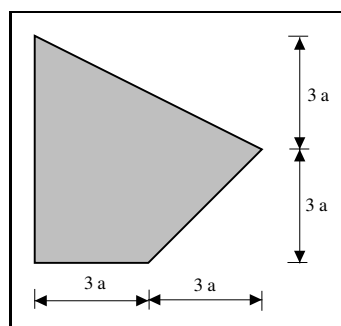


Figura 6.24

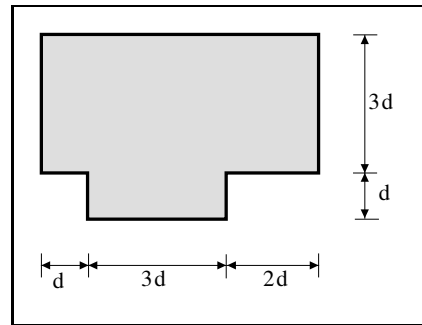


Figura 6.25

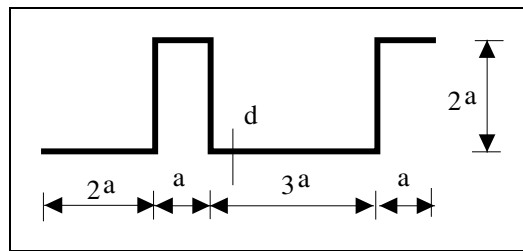


Figura 6.26

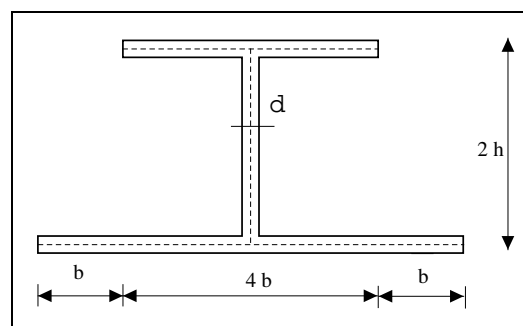


Figura 6.27

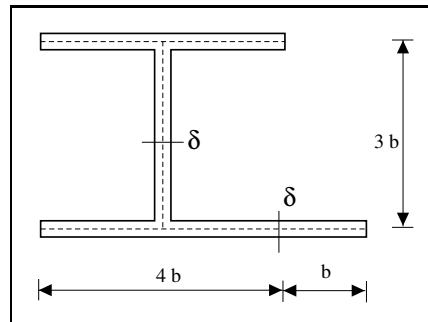


Figura 6.28

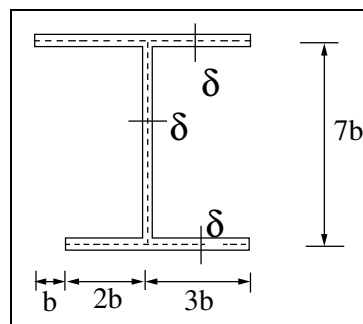


Figura 6.29

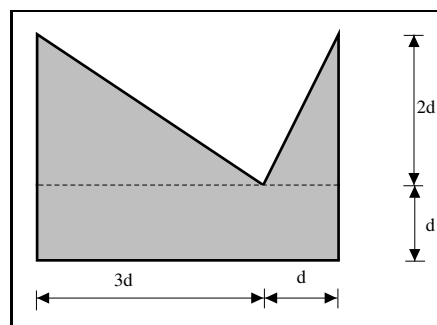


Figura 6.30

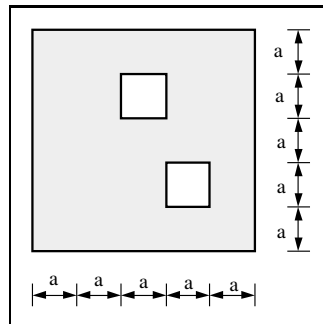


Figura 6.31

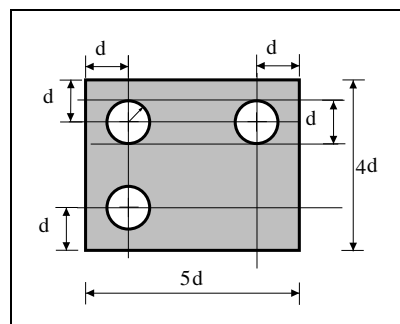


Figura 6.32

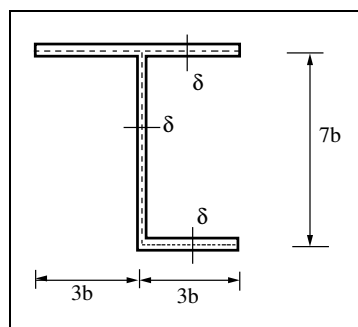


Figura 6.33

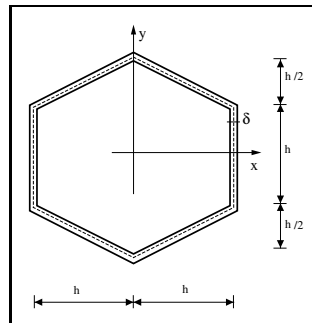


Figura 6.34

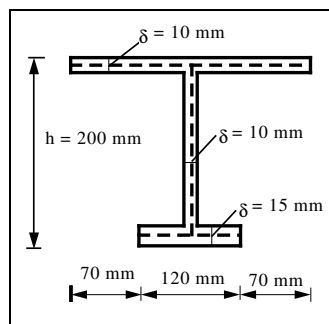


Figura 6.35